代数拓扑讨论班——关于 MV 列的讨论

刘晓龙

摘要

事实上根据 MV 序列我们知道这个正合列和 $U\cap V, U, V, U\cup V$ 的上同调群相关, 这就给了我们天然的归纳属性. 我们要得到一个同构, 如果这个同构对 $U\cap V, U, V$ 都对, 根据 MV 序列和 5 引理, 这个同构对 $U\cup V$ 也对, 于是就可以归纳. 这就是典型的 MV Argument. 通过这个方法, 本笔记将证明在一定条件下我们可以得到 de Rham 上同调有限维性, Poincaré 对偶, Künneth 定理和 Leray-Hirsch 定理.

1 Good Cover 的存在性及 de Rham 上同调的维数

定义 1.1. *对 n 维流形 M, 一个开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ 称为 good cover, 如果对任意的有限非空交 $\bigcap_{i=0}^{p} U_{\alpha_i}$ 都和 $\mathbb{R}^n$ 微分同胚.*

定理 1.2. *任何流形都有一个 good cover. 如果流形是紧的, 那么还有 finite good cover.*

证明. 给 M 赋予 Riemann 度量 g, 考虑上面的测地凸邻域 (测地凸邻域的存在性参考 do Carmo[2] 第三章命题 4.2), 也就是说对任意 $p\in M$, 存在 $\beta>0$ 使得测地球 $B_\beta(p)$ 是强凸的因为所有的强凸集都是完全法邻域, 那么存在 $\delta>0$ 使得 $p\in U$ 有 $\exp_p(B_\delta(0))\supset U$ 且是微分同胚 (do Carmo[2] 的第三章定理 3.7) 于是都是星形集, 可以证明星形集都微分同胚于 $\mathbb{R}^n$(略, 根据 [3]), 而根据定义就知道强凸集的交还是强凸的, 于是得到结论, 微分流形都有一个 good cover. 如果流形是紧的, 那么还有 finite good cover 是显然的. □

注 1.3. *事实上我们可以看到, 对于任何一个 good cover $\mathscr{U}$, 都存在加细 $\mathscr{V}$ 也是 good cover, 这事实上和上面的证明类似, 只需要在每个测地凸邻域内部取就行.*

定理 1.4. *如果流形 M 有一个 finite good cover, 那么其上同调群只有有限维.*

证明. 考虑 MV 序列

$$\cdots \longrightarrow H^{q-1}(U\cap V) \xrightarrow{d^*} H^q(U\cup V) \xrightarrow{r} H^q(U)\oplus H^q(V) \longrightarrow \cdots$$

得到

$$H^q(U\cup V)\cong \ker r\oplus \mathrm{Im} r=\mathrm{Im} d^*\oplus \mathrm{Im} r,$$

因此如果 $H^q(U), H^q(V), H^{q-1}(U\cap V)$ 有限维, 那么对于 $H^q(U\cup V)$ 也是如此.

根据 Poincaré 引理对 M 上 good cover 的基数做归纳. 假设 good cover 为 $\{U_1,...,U_p\}$, 对于一个显然成立, 然后考虑 $\bigcup_{j=0}^{p-1} U_i, U_p$, 因为 $\bigcup_{j=0}^{p-1} U_i\cap U_p$ 有 good cover $\{U_i\cap U_p: 0\le i\le p-1\}$, 那么根据归纳假设, 有限维对 $\bigcup_{j=0}^{p} U_i=M$ 成立, 于是得到结论. □

注 1.5. *(i) 类似的结论对紧支上同调也对, 证明类似;*

(ii) 无穷维上同调群的例子也很好找, 例如 $\mathrm{int}(I)\times\mathbb{R}_{>0}$ 去掉圆心在 $(2k,\frac{1}{2})$ 半径为 $\frac{1}{4}$ 的闭圆盘, 考虑 Hatcher 的命题 3.33: 设 X 是可定向集的 X_α 的并, 而且 X 内的紧集在某一 X_α 内, 那么自然映射 $\varinjlim_\alpha H_i(X_\alpha;G)\cong H_i(X;G)$ 是同构. 现在假设 X_k 为 X 在第 k 个空心截断, 那么显然满足条件, 于是 $\varinjlim_k H_i(X_k;G)\cong H_i(X;G)$. 首先注意到 $X_k\simeq\bigvee_{j=1}^{k} S^1$, 那么得到 $H_1(X;\mathbb{R})=\bigoplus_{j=1}^{\infty}\mathbb{R}$, 根据万有系数我们知道 $H^1(X;\mathbb{R})\cong\prod_{j=1}^{\infty}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2 可定向流形的 Poincaré 对偶

首先我们知道在线性代数里面, 对于一个双线性型 $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times W\to\mathbb{R}$ 称为非退化的, 如果有 $\langle v,W\rangle = 0\Rightarrow v=0$ 且 $\langle V,w\rangle=0\Rightarrow w=0$. 这个显然就是说 $v\mapsto\langle v,\cdot\rangle$ 使得 $V\hookrightarrow W^*$ 单, 且 $w\mapsto\langle\cdot,w\rangle$ 使得 $W\hookrightarrow V^*$ 单. 如果线性空间都是有限维, 那么

引理 2.1. *如果 V,W 是有限维线性空间, 那么双线性型 $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times W\to\mathbb{R}$ 非退化当且仅当 $v\mapsto\langle v,\cdot\rangle$ 使得 $V\cong W^*$.*

证明. 一方面, 如果 $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times W\to\mathbb{R}$ 非退化, 那么 $V\hookrightarrow W^*$ 和 $W\hookrightarrow V^*$ 单, 于是

$$\dim V\le\dim W^*=\dim W\le\dim V^*=\dim V,$$

于是 $V\cong W^*$.

另一方面如果 $v\mapsto\langle v,\cdot\rangle$ 使得 $V\cong W^*$ 同构, 那么如果 $\langle v,W\rangle=0$, 由于单射得到 $v=0$; 如果 $\langle V,w\rangle=0$, 那么由于满射, 那么对任意的 $f\in W^*$ 都有 $f(w)=0$, 取一组基出来即可得到 $w=0$, 所以 $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times W\to\mathbb{R}$ 非退化. □

这个引理就是我们来引入 Poincaré 对偶的工具. 事实上我们对 n 维可定向流形 M, 考虑双线性型

$$\int : H^q(M)\times H_c^{n-q}(M)\to\mathbb{R},(\alpha,\beta)\mapsto\int_M\alpha\wedge\beta,$$

如果这个双线性型是非退化的, 且上同调群都是维数有限, 那么由引理就可以得到

$$H^q(M)\cong(H_c^{n-q}(M))^*.$$

于是根据一开始的内容, 我们只需要假设 M 上有有限的 Good Cover, 那么上同调群的维数有限就有保证, 我们只需要考虑非退化性.

定理 2.2 (可定向流形的 Poincaré 对偶). *设 n 维可定向流形 M 上有有限的 Good Cover, 则上述双线性型非退化, 也就是说 $H^q(M)\cong(H_c^{n-q}(M))^*$.*

引理 2.3. *考虑两个 Mayer-Vietoris 序列并且如图排列, 那么得到一个在差符号意义下的交换图:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^q(U\cup V) \arrow[r, "\mathrm{res}"] \arrow[d, dash, "\times"] & H^q(U)\oplus H^q(V) \arrow[r, "-"] \arrow[d, dash, "\times"] & H^q(U\cap V) \arrow[r, "d^*"] \arrow[d, dash, "\times"] & H^{q+1}(U\cup V) \arrow[r] \arrow[d, dash, "\times"] & \cdots \\
\cdots & H_c^{n-q}(U\cup V) \arrow[l] \arrow[d, "\int_{U\cup V}"] & H_c^{n-q}(U)\oplus H_c^{n-q}(V) \arrow[l, "+"'] \arrow[d, "\int_U+\int_V"] & H_c^{n-q}(U\cap V) \arrow[l] \arrow[d, "\int_{U\cap V}"] & H_c^{n-q-1}(U\cup V) \arrow[l, "d_*"'] \arrow[d, "\int_{U\cup V}"] & \cdots \arrow[l] \\
 & \mathbb{R} & \mathbb{R} & \mathbb{R} & \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

等价的, 我们就是有差符号意义下的交换图:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^q(U\cup V) \arrow[r] \arrow[d] & H^q(U)\oplus H^q(V) \arrow[r] \arrow[d] & H^q(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d] & H^{q+1}(U\cup V) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_c^{n-q}(U\cup V)^* \arrow[r] & H_c^{n-q}(U)^*\oplus H_c^{n-q}(V)^* \arrow[r] & H_c^{n-q}(U\cap V)^* \arrow[r] & H_c^{n-q-1}(U\cup V)^* \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

注 2.4. *事实上看到这个定理, 我们证明基本思路已经有了. 对这个引理用 5 引理, 那么我们就知道命题如果对 $U,V,U\cap V$, 那么也对 $U\cup V$ 成立. 事实上对一般的 R 系数的奇异上同调对 R-可定向流形的 Poincaré 对偶, 思路是一样的, 具体可以参考 Hatcher.*

证明. 前两个方块是显然的, 只需考虑第三个方块. 取 $\omega \in H^q(U\cap V)$, 熟知 d^* 的作用为 $d^*\omega|_U = -d(\rho_V\omega), d^*\omega|_V = d(\rho_U\omega)$, 其中 ρ 为 U, V 单位分解的函数. 取 $\tau \in H_c^{n-q-1}(U\cup V)$, 熟知 d_* 作用为 $d_*\tau$ 满足 $d_*\tau$ 在 U 内用 0 扩张定义为 $-d(\rho_U\tau)$; 且 $d_*\tau$ 在 V 内用 0 扩张定义为 $d(\rho_V\tau)$.

下面开始验证. 首先由于 τ, ω 是闭形式, 那么 $d(\rho_V\tau) = (d\rho_V)\tau, d(\rho_V\omega) = (d\rho_V)\omega$, 那么

$$\int_{U\cap V} \omega \wedge d_*\tau = \int_{U\cap V} \omega \wedge (d\rho_V)\tau = (-1)^{\deg\omega} \int_{U\cap V} (d\rho_V)\omega \wedge \tau,$$

另一个方向, 由于 $d^*\omega$ 在 $U\cap V$ 上紧支, 我们有 $\int_{U\cup V} d^*\omega\wedge\tau = -\int_{U\cap V}(d\rho_V)\omega\wedge\tau$, 因此

$$\int_{U\cup V} d^*\omega \wedge \tau = (-1)^{\deg\omega - 1} \int_{U\cap V} \omega \wedge d_*\tau,$$

引理成立. □

定理的证明. 对引理用 5 引理, 那么我们就知道命题如果对 $U, V, U\cap V$, 那么也对 $U\cup V$ 成立. 接下来只需对 good cover 的基数用归纳法. 首先由 Poincaré 引理我们知道定理对 $\mathbb{R}^n$ 成立, 接下来假设每个 good cover 有 p 个开集的流形成立, 那我们考虑 good cover 有 $p+1$ 个开集的流形. 假设这些开集为 $\{U_0, \cdots, U_p\}$, 那么 $U_p \cap \bigcup_{i=0}^{p-1} U_i$ 有由 p 个开集组成的 good cover, 那么定理对 $U_p, \bigcup_{i=0}^{p-1} U_i$ 和 $U_p\cap\bigcup_{i=0}^{p-1} U_i$ 成立, 那么也对 $\bigcup_{i=0}^{p} U_i = M$ 成立. 这样就证明了定理. □

注 2.5. *事实上经过对流形的拓扑更精细的研究, 对于任何 n 维可定向流形, 都有 $H^q(M) \cong (H_c^{n-q}(M))^*$, 但注意到这样的话上同调群维数不一定有限, 那么也就 $H_c^q(M) \ncong (H^{n-q}(M))^*$. 这样的例子事实上很好举, 假设 $M = \coprod_{i=1}^{\infty} M_i$, 其中 M_i 均为 good cover 的 n 维可定向流形. 那么 $H^q(M) = \prod_i H^q(M_i)$ 且 $H_c^q(M) = \bigoplus_i H_c^q(M_i)$, 那么确实就有*

$$(H_c^{n-q}(M))^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\bigoplus_i H_c^{n-q}(M_i), \mathbb{R}\right) = \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H_c^{n-q}(M_i), \mathbb{R}) = H^q(M),$$

但反过来自然不一定行.

3 闭可定向子流形的 Poincaré 对偶

设 M 为 n 维可定向流形, 考虑 S 为其 k 维闭子流形. 那么有自然的包含映射 $i: S \hookrightarrow M$. 我们断言存在唯一的上同调类 $[\eta_S] \in H^{n-k}(M)$ 使得对任意的 $\omega \in H_c^k(M)$ 有

$$\int_S i^*\omega = \int_M \omega \wedge \eta_S,$$

这样的子流形 S 的 Poincaré 对偶或者子流形的基本类 (Fundamental class). 现在我们来讨论一下它. 考虑 $\varphi \in (H_c^k(M))^*, \varphi : [\omega] \mapsto \int_S i^*\omega$, 根据 Poincaré 对偶, 我们有同构

$$D : H^{n-k}(M) \longrightarrow (H_c^k(M))^*$$

$$[\tau] \longmapsto \left(D_{[\tau]} : [\omega] \mapsto \int_M \tau \wedge \omega \right)$$

设 $[\gamma_S] = D^{-1}(\varphi)$, 那么取 $\eta_S = (-1)^{k(n-k)}\gamma_S$, 那么有 $\int_S i^*\omega = \int_M \omega \wedge \eta_S$, 这就是我们要的东西.

反过来, 我们考虑 M 的紧 k 维子流形 S, 显然 Hausdorff 空间的紧子集是闭的, 那么它也有刚刚的结论, 我们这里假设刚刚的 $[\eta_S]$ 为其闭 Poincaré 对偶, 接下来我们考虑其紧 Poincaré 对偶. 这里假设 M 有 finite good cover, 以保证 $(H^k(M))^* \cong H_c^{n-k}(M)$ 的成立. 和刚刚类似, 我们存在唯一的 $[\eta'_S] \in H_c^{n-k}(M)$ 使得对任意的 $\omega \in H^k(M)$ 有 $\int_S i^*\omega = \int_M \omega \wedge \eta'_S$.

事实上, 我们发现在第二种情况下,η'_S 作为一个微分形式 (而非其代表的上同调类), 它也是 S 的闭 Poincaré 对偶, 也就是说有自然映射 $H_c^{n-k}(M) \to H^{n-k}(M)$(所以在这种情况下我们可以取闭 Poincaré 对偶为紧支的). 但是二者所代表的上同调类可以截然不同. 这个很显然, 比如说考虑 $\mathbb{R}^n$ 内某点 p, 由于 $H^n(\mathbb{R}^n) = 0$, 那么其闭 Poincaré 对偶 $[\eta_p]$ 是任取的 n-形式, 但由于 $H_c^n(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, 那么可以知道其紧 Poincaré 对偶是 $\eta'_S = f d\mathrm{Vol}$ 的形式, 其中 f 为 Bump 函数, 且 $\int_M \eta'_S = 1$.

例 3.1. *我们考虑 $M = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, 假设 x, y 为其标准坐标, 而 r, θ 为其极坐标.*

(i) 假设 $S = \{(x, 0) : x > 0\}$, 我们断言 $\frac{d\theta}{2\pi}$ 为其 Poincaré 对偶, 那么只需要证明对所有的 $\omega \in H_c^1(M)$ 都有 $\int_S i^*\omega = \int_M \omega \wedge \frac{d\theta}{2\pi}$. 不妨设 $\omega = f dr + g d\theta$, 我们有 $d\omega = \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta \wedge dr + \frac{\partial g}{\partial r} dr \wedge d\theta$, 由于 ω 是闭形式, 那么有 $\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial g}{\partial r}$. 事实上我们发现 $\frac{d}{d\theta} \int_0^\infty f(r,\theta) dr = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \theta} dr = \int_0^\infty \frac{\partial g}{\partial r} dr = g(r, 0)|_0^\infty = 0$, 那么

$$\int_S i^*\omega = \int_0^\infty f(r, 0) dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty f dr = \int_M \omega \wedge \frac{d\theta}{2\pi},$$

得到结论.

(ii) 接下来考虑 M 内的单位圆 S^1. 这是紧子流形, 我们分别断言其闭 Poincaré 对偶和紧 Poincaré 对偶为 0 和 $\rho(r)dr$, 其中 ρ 为积分为 1 的 Bump 函数. 首先, 任取紧支闭形式 ω, 根据 Stokes 定理得到 $\int_{S^1} i^*\omega = 0$, 于是断言成立. 下面考虑紧 Poincaré 对偶. 任取闭形式 $\omega = f dr + g d\theta$, 那么 $\int_{S^1} i^*\omega = \int_0^{2\pi} g(1, \theta) d\theta$, 另一方面, 注意到 $\frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} g(r, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta = f(1, \theta)|_0^{2\pi} = 0$, 于是

$$\int_M \omega \wedge \rho(r) dr = \int_a^b \rho(r) \left(\int_0^{2\pi} g(r, \theta) d\theta \right) dr = \int_0^{2\pi} g(1, \theta) d\theta = \int_{S^1} i^*\omega,$$

于是得到结论.

注 3.2. *事实上不难得到: 假设 S 为 M 的紧子流形, 那么 S 的紧 Poincaré 对偶的支撑集可以收缩到 S 的任意开邻域内. 这被我们称为局部原理. 这个很平凡, 因为对 S 在其开邻域 W 上的紧 Poincaré 对偶 $\eta'_{S,W} \in H_c^{n-k}(W)$, 将其 0 扩张为 $\eta'_S \in H_c^{n-k}(M)$, 那么 $\int_S i^*\omega = \int_W \omega \wedge \eta'_{S,W} = \int_M \omega \wedge \eta'_S$, 这样 η'_S 就是 S 在 M 内的紧 Poincaré 对偶.*

4 Künneth 定理和 Leray-Hirsch 定理

定理 4.1 (上同调的 Künneth 定理)**.** *对流形 M 有 finite good cover, 而 F 是另一个流形, 那么*

$$H^*(M\times F)=H^*(M)\otimes H^*(F) \text{ 即 } H^n(M\times F)=\bigoplus_{p+q=n}H^p(M)\otimes H^q(F).$$

证明. 对于自然投影 $M\xleftarrow{\pi}M\times F\xrightarrow{\rho}F$, 有诱导 $\omega\otimes\phi\mapsto\pi^*\omega\wedge\rho^*\phi$, 则诱导出映射 $\psi:H^*(M)\otimes H^*(F)\to H^*(M\times F)$, 那我们断言 ψ 是同构.

当 $M=\mathbb{R}^m$ 时, 这就是 Poincaré 引理, 所以得证.

对于一般的 M, 考虑 U,V 为 M 的两个开集, 固定 n, 那么有 MV 序列

$$\cdots\to H^p(U\cup V)\to H^p(U)\oplus H^p(V)\to H^p(U\cap V)\to\cdots,$$

因为线性空间是自由 $\mathbb{R}$-模, 那自然是平坦的, 于是函子 $(-)\otimes V$ 正合, 那么有正合列

$$\begin{array}{l}\cdots\longrightarrow H^p(U\cup V)\otimes H^{n-p}(F)\longrightarrow (H^p(U)\otimes H^{n-p}(F))\oplus(H^p(V)\otimes H^{n-p}(F))\\ \qquad\qquad\qquad\downarrow\\ H^p(U\cap V)\otimes H^{n-p}(F)\longrightarrow\cdots\end{array}$$

对 p 做直和会得到正合列

$$\begin{array}{l}\cdots\longrightarrow \bigoplus_{p=0}^n H^p(U\cup V)\otimes H^{n-p}(F)\longrightarrow \bigoplus_{p=0}^n(H^p(U)\otimes H^{n-p}(F))\oplus(H^p(V)\otimes H^{n-p}(F))\\ \qquad\qquad\qquad\downarrow\\ \bigoplus_{p=0}^n H^p(U\cap V)\otimes H^{n-p}(F)\longrightarrow\cdots\end{array}$$

考虑下面的图表, 上下均是 MV 序列:

$$\begin{tikzcd}\bigoplus_{p=0}^n H^p(U\cup V)\otimes H^{n-p}(F) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\psi"] & \bigoplus_{p=0}^n(H^p(U)\otimes H^{n-p}(F))\oplus(H^p(V)\otimes H^{n-p}(F)) \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ H^n((U\cup V)\times F) \arrow[r] & H^n(U\times F)\oplus H^n(V\times F)\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}\arrow[r] & \bigoplus_{p=0}^n H^p(U\cap V)\otimes H^{n-p}(F) \arrow[r, "d^*"] \arrow[d, dashed, "\psi"] & \bigoplus_{p=0}^n H^{p+1}(U\cup V)\otimes H^{n-p}(F) \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ \arrow[r] & H^n((U\cap V)\times F) \arrow[r, "d^*"] & H^{n+1}((U\cup V)\times F)\end{tikzcd}$$

那么除了最后一块之外都交换. 只需考虑最后一块, 任取 $\omega\otimes\phi\in H^p(U\cap V)\otimes H^{n-p}(F)$, 那么只需证明 $\pi^*(d^*\omega)\wedge\rho^*\phi=d^*(\pi^*\omega\wedge\rho^*\phi)$. 考虑 U,V 的单位分解 $\{\rho_U,\rho_V\}$, 于是 $\{\pi^*\rho_U,\pi^*\rho_V\}$ 也是 $(U\cup V)\times F$ 关于 $\{U\times F,V\times F\}$ 的单位分解, 于是

$$d^*(\pi^*\omega\wedge\rho^*\phi)=d((\pi^*\rho_U)\pi^*\omega\wedge\rho^*\phi)=(d\pi^*(\rho_U\omega))\wedge\rho^*\phi=\pi^*(d^*\omega)\wedge\rho^*\phi,$$

于是图表交换.

根据 5 引理知道如果定理对 $U,V,U\cap V$ 成立, 那么也对 $U\cup V$ 成立, 这是标准的 MV-Argument. 于是对 M 的 good cover 归纳即可得到结论. □

定理 4.2 (紧支上同调的 Künneth 定理)**.** *对流形 M,N 有 finite good cover, 那么*

$$H_c^*(M\times F)=H_c^*(M)\otimes H_c^*(F) \text{ 即 } H_c^n(M\times F)=\bigoplus_{p+q=n}H_c^p(M)\otimes H_c^q(F).$$

证明. 证明也是标准的 MV-Argument, 略. 如果流形均可定向, 那么还可以用 Poincaré 对偶. □

定义 4.3. *设 G 是拓扑群有效左作用在空间 F 上. 满射 $\pi : E \to B$ 称为纤维是 F 且结构群是 G 的纤维丛, 如果存在 B 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 和保持纤维的同胚 $\phi_\alpha : E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times F$, 且转化函数 $g_{\alpha\beta}(x) = \phi_\alpha \phi_\beta^{-1}|_{\{x\}\times F} \in G$. 一般也成为 G-丛.*

因为我们考虑的 de Rham 理论, 那么目前只考虑这些空间都是光滑流形且映射都是光滑映射的情况. 一般结构群也是 F 的自微分同胚群.

注 4.4. *事实上转化函数 $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to G$ 满足 cocycle 条件, 也就是 $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$. 反过来, 给定值在 G 内的 cocycle $\{g_{\alpha\beta}\}$, 考虑 $E = \left(\coprod_\alpha U_\alpha \times F\right)/((x,y) \sim (x, g_{\alpha\beta}(x)y))$, 这很明显就是我们想要的纤维丛.*

假设 $\pi : E \to M$ 为纤维是 F 的纤维丛, 设 $\{e_1, ..., e_r\}$ 是 E 内的上同调类使得其限制在纤维上构成纤维上同调的一组基 (那自然是齐次的). 于是有映射 $\psi : H^*(M) \otimes \mathbb{R}\{e_1, ..., e_r\} \to H^*(E)$.

定理 4.5 (Leray-Hirsch 定理)**.** *假设 $\pi : E \to M$ 为纤维是 F 的纤维丛, 设 M 有 finite good cover, 设 $\{e_1, ..., e_r\}$ 是 E 内的上同调类使得其限制在纤维能自由生成纤维的上同调, 那么*

$$H^*(E) \cong H^*(M) \otimes \mathbb{R}\{e_1, ..., e_r\} \cong H^*(M) \otimes H^*(F).$$

证明. 根据上面的 Künneth 定理, 我们知道这个定理关于平凡丛成立, 也就是说对 M 的 good cover 里的元素, 定理成立, 下面进行 MV-Argument.

设 $d_i = \deg(e_i)$, 设 x_i 为次数为 d_i 的变量. 我们定义 M 上开集的函子如下

$$K^m(U) = \sum_{i=1}^{r} H^{m-d_i}(U, \mathbb{R}) x_i, L^m(U) = H^m(E|_U, \mathbb{R}),$$

定义映射 $\alpha_U : K^m(U) \to L^m(U)$ 为

$$\alpha_U\left(\sum s_i x_i\right) = \sum \pi^*(s_i) e_i, s_i \in H^{m-d_i}(U, \mathbb{R}).$$

于是得到交换图如下, 其中上下行都是 MV 序列:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & K^m(U\cup V) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{U\cup V}"] & K^m(U)\oplus K^m(V) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_U\oplus\alpha_V"] & K^m(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{U\cap V}"] & K^{m+1}(U\cup V) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{U\cup V}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & L^m(U\cup V) \arrow[r] & L^m(U)\oplus L^m(V) \arrow[r] & L^m(U\cap V) \arrow[r] & L^{m+1}(U\cup V) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

根据 5 引理和对 finite good cover 做归纳即可得到

$$H^*(E, \mathbb{R}) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \pi^*(H^*(M, \mathbb{R})) e_i \cong H^*(M) \otimes \mathbb{R}\{e_1, ..., e_r\} \cong H^*(M) \otimes H^*(F),$$

得到结论. □

参考文献

[1] Raoul Bott, Loring W.Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer, 1982.

[2] Manfredo Perdigao do Carmo, *Riemannian Geometry*, Springer, 1992.

[3] Ryan Unger, *Why are geodesically convex sets diffeomorphic to* $\mathbb{R}^n$, `https://math.stackexchange.com/questions/1869739/why-are-geodesically-convex-sets-diffeomorphic-to-bbb-rn?r=SearchResults`.