# 爆破的基本性质及其计算

温尊

2022 年 9 月 3 日

## 目录



## 1 交换代数基础——Rees 代数

**定义 1.1.** *(i) 考虑环 $R$ 和理想 $I$, 则其 Rees 代数为*

$$\mathrm{Bl}_I(R) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n;$$

*(ii) 对于 $a \in I$, 将其视为 $\deg(a) = 1$, 则定义仿射 Rees 代数为 $R[\frac{I}{a}] \cong \mathrm{Bl}_I(R)_{(a)}$.*

**命题 1.2.** *考虑环 $R$ 和理想 $I$, 假设 $R' = R[\frac{I}{a}]$ 是仿射 Rees 代数, 则*

*(i) $a$ 在 $R'$ 里的像是非零因子;*

*(ii) $IR' = aR'$, $(R')_a = R_a$.*

*证明.* 根据构造, 这是平凡的. □

**命题 1.3.** *考虑环同态 $R \to S$ 和理想 $I \subset R$, 取 $a \in I$. 设 $J = IS$ 且 $b$ 是 $a$ 的像, 则*

$$S\left[\frac{J}{b}\right] = \frac{(S \otimes_R R[\frac{I}{a}])}{b\text{-高次挠元}}.$$

*证明.* 假设 $S' = \dfrac{(S \otimes_R R[\frac{I}{a}])}{b\text{-高次挠元}}$, 考虑同态 $S \otimes_R R[\frac{I}{a}] \to S[\frac{J}{b}]$, 注意到这是满射且会零化掉 $a$-高次挠元 (因为 $b$ 不是零因子). 故同态下降到满同态 $S' \to S[\frac{J}{b}]$.

现在构造拟同态, 取 $z = \frac{y}{b^n} \in S[\frac{J}{b}], y \in J^n$, 记 $y = \sum x_i s_i, x_i \in I^n, s_i \in S$, 则我们设 $z \mapsto [\sum s_i \otimes x_i/a^n]$. 只需考虑是否良定, 事实上这是因为 $a^n \ker(S \otimes_R I^n \to J^n) = 0$, 故下降到 $S'$ 是 0. □

**命题 1.4.** *(i) 设 $R$ 是个环, 设 $P = R[t_1, ..., t_n]$, 取 $I = (t_1, ..., t_n)$, 则*

$$P[T_1, ..., T_n]/(t_iT_j - t_jT_i) \cong \mathrm{Bl}_I(P), T_i \mapsto t_i;$$

*(ii) 同 (i) 假设, 有*

$$P[x_2, ..., x_n]/(t_1x_2 - t_2, ..., t_1x_n - t_n) \cong P[\frac{I}{t_1}], x_i \mapsto t_i/t_1;$$

*(iii) 设 $R$ 是个环, 理想 $I = (f, a_1, ..., a_n)$, 则*

$$\frac{R[x_1, ..., x_n]/(fx_i - a_i)}{a\text{-高次挠元}} \cong R[\frac{I}{f}].$$

*证明.* (i)(ii) 省略. 证明 (iii). 考虑 $P = \mathbb{Z}[t_0, t_1, ..., t_n] \to R, t_0 \mapsto f, t_i \to a_i$, 设 $J = (t_0, t_1, ..., t_n) \subset P$. 根据 (ii) 我们得知 $P[x_1, x_2, ..., x_n]/(t_0x_i - t_i) \cong P[\frac{I}{t_0}]$, 根据命题1.3即可得到结论. □

# 2 概形的爆破理论

## 2.1 概形爆破及其性质

**定义 2.1.** *设 $X$ 是概形, 而 $\mathscr{I} \subset \mathscr{O}_X$ 是拟凝聚理想, 对应一个闭子概形 $Z$. 我们称 $X$ 沿 $Z$ 的爆破或者在理想 $\mathscr{I}$ 处爆破为映射*

$$b : \mathbf{Proj}_X \bigoplus_{n \geq 0} \mathscr{I}^n \to X.$$

*称 $b^{-1}(Z)$ 为例外除子, 称 $Z$ 为爆破中心.*

**注 2.2.** *(i) 设* $X' = \mathbf{Proj}_X \bigoplus_{n\geq 0} \mathscr{I}^n$*, 注意到这时由于* $X'$ *可嵌入* $\mathbf{P}(\mathscr{I})$*, 故* $\mathscr{O}_{X'}(1)$ *是* $b$*-相对极丰沛的; 另外如果* $\mathscr{I}$ *有限生成, 则* $b$ *是射影映射且* $\mathscr{O}_{X'}(1)$ *是* $b$*-相对丰沛;*

*(ii) 局部上任取仿射开集* $U = \mathrm{Spec}(A)$*, 设* $I \subset A$ *使得* $\mathscr{I}|_U = \tilde{I}$*, 则* $b^{-1}(U) = \mathrm{Proj} \bigoplus_{n\geq 0} I^d$ *为 Rees 代数的齐次谱. 且* $b^{-1}(U)$ *被仿射 Rees 代数* $A[\frac{I}{a}]$ *的谱覆盖;*

*(iii) 例外除子可以这样描述: 如果* $i: Z \to X$*, 则*

$$E = \mathbf{Proj}_X i^* \bigoplus_{d\geq 0} \mathscr{I}^d = \mathbf{Proj}_X \bigoplus_{d\geq 0} \mathscr{I}^d/\mathscr{I}^{d+1}.$$

**命题 2.3** (平坦基变换)**.** *假设* $g: X_1 \to X_2$ *平坦, 取闭子概形* $Z_2 \subset X_2$*, 设* $Z_1 = g^{-1}(Z_2)$*, 设* $X_i'$ *为对应的爆破, 则有纤维积*

$$\begin{array}{ccc} X_1' & \longrightarrow & X_2' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \longrightarrow & X_2 \end{array}$$

*证明.* 首先 $\mathscr{I}_1 = \mathrm{Im}(g^*\mathscr{I}_2 \to \mathscr{O}_{X_1})$, 其次 $X_1 \times_{X_2} X_2' = \mathbf{Proj}_{X_1} \bigoplus_{n\geq 0} g^*\mathscr{I}_2^n$. 由于 $g$ 平坦, 则 $g^*\mathscr{I}_2 \to \mathscr{O}_{X_1}$ 单, 于是得到结论. □

**定理 2.4.** *设* $X$ *是概形, 而* $\mathscr{I} \subset \mathscr{O}_X$ *是拟凝聚理想, 对应一个闭子概形* $Z$*. 考虑爆破* $b: X' \to X$*.*

*(i) 限制* $b|_{b^{-1}(X-Z)}: b^{-1}(X-Z) \to X - Z$ *是同构;*

*(ii) 例外除子* $E$ *是* $X'$ *的有效 Cartier 除子;*

*(iii) 有典范同构* $\mathscr{O}_{X'}(-1) \cong \mathscr{O}_{X'}(E)$*.*

*证明.* (i) 根据命题2.3, 爆破和限制在开子概形是交换的, 故成立;

(ii) 不妨设 $X = \mathrm{Spec}(A)$ 仿射, 则 $Z = \mathrm{Spec}(A/I)$, 故 $X'$ 被仿射 Rees 代数 $A' = A[\frac{I}{a}]$ 的谱覆盖. 而 $IA' = aA'$ 且 $a$ 落在 $A'$ 内是非零因子, 且由于 $Z$ 在 $\mathrm{Spec}(A')$ 就是 $\mathrm{Spec}(A'/IA') \subset \mathrm{Spec}(A')$, 故成立;

(iii) 考虑典范映射 $\psi: b^*\mathscr{I} \to \mathscr{O}_{X'}(1)$, 只需证明其会经过同构 $\mathscr{I}_E \to \mathscr{O}_{X'}(1)$. 考虑局部 $\mathrm{Spec}(A'), A' = A[\frac{I}{a}]$, 则 $\psi$ 为 $I \otimes_A A' \to \left(\left(\bigoplus_{d\geq 0} I^d\right)_a\right)_1$, 不难看出此即为 $I \otimes_A A' \to IA' = aA'$. □

**推论 1.** *如果考虑爆破* $b: \mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) \to X$*, 如果对任意的仿射开集* $V \subset X$ *使得* $\Gamma(V, \mathscr{I})$ *存在正则元, 那么* $b$ *是双有理同态.*

*证明.* 假设对应闭子概形 $Z$, 假设 $U = X - Z$. 则由于 $b|_{b^{-1}(U)}: b^{-1}(U) \to U$ 是同构, 而由下面的交换代数引理, 我们得知 $U, b^{-1}(U)$ 分别在 $X, X'$ 内概形稠密, 故 $b$ 为双有理. □

**引理 2.5.** *(见 [2] 引理 9.23)* 设 $X=\mathrm{Spec}(R)$ 且考虑理想 $I\subset R$ 和开集 $U=X-V(I)$, 考虑如下命题:

*(a)* $U$ 在 $X$ 内概形稠密;

*(b)* $U$ 包含一个主开集 $D(t)$ 其中 $t$ 不是零因子;

*(c)* $I$ 包含一个非零因子 $t\in R$.

则 $(c)\Leftrightarrow(b)\Rightarrow(a)$. 如果 $R$ 诺特, 则全等价.

事实上爆破满足泛性质如下: 考虑 $Z\subset X$. 考虑 $X$-概形范畴的满子范畴 $\mathcal{C}$ 包含 $f:Y\to X$ 使得 $Z$ 逆像是 $Y$ 内的有效 Cartier 除子. 则爆破是此范畴内的终对象.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed, "\exists!"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[dl, "b"] \\ X & \end{tikzcd}$$

事实上考虑 $D=f^{-1}(Z)$, 则有满射 $f^*\mathscr{I}_Z\to\mathscr{I}_D$. 从而得到 $\psi:\bigoplus f^*\mathscr{I}_Z^d\to\mathscr{I}_D^d$, 从而得到 $Y\to X'$. 再看唯一性, 事实上注意到 $Y-D\to X'-b^{-1}(Z)=X-Z$ 唯一, 且 $Y-D$ 在 $Y$ 概形稠密, 故唯一.

**推论 2.** *如果 $Z\subset X$ 是有效 Cartier 除子, 则爆破 $X'=X$.*

*证明.* 由泛性质显然. □

**命题 2.6.** *爆破 $X'$ 会继承 $X$ 的既约性和整性.*

*证明.* 简单的交换代数. □

**命题 2.7.** *考虑 $Z\subset X$ 的爆破 $b$, 则其诱导了 $X'$ 的不可约分支的一般点到 $X$ 的不在 $Z$ 内的不可约分支的一般点的双射.*

*证明.* 由于 $X'-E=X-Z$, 只需证明对某个概形 $S$ 和其有效 Cartier 除子 $D$, 则任何 $S$ 的不可约分支的一般点都不在 $D$ 里. 不妨设 $S=\mathrm{Spec}(A)$, 则 $D=V(f)$ 且 $f$ 不是零因子. 如果 $f\in\mathfrak{p}\subset A$ 在极小素理想内, 则由于 $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ 均为幂零元, 则矛盾! □

**命题 2.8.** *考虑概形 $X$ 和拟凝聚理想 $\mathscr{I},\mathscr{J}$. 考虑爆破 $b:X'=\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)\to X$ 和 $b':\mathrm{Bl}_{b^{-1}\mathscr{J}\mathscr{O}_{X'}}X'\to X'$, 则 $b\circ b':\mathrm{Bl}_{b^{-1}\mathscr{J}\mathscr{O}_{X'}}X'\to X$ 同构于 $b'':\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}\mathscr{J}}(X)\to X$.*

*证明.* □

**命题 2.9.** 假设 $X$ 是 *qcqs* 概形, 闭子概形 $Z \subset X$ 有限表现. 考虑爆破 $b : X' = \mathrm{Bl}_Z(X) \to X$, 取有限表现的闭子概形 $Z' \subset X'$, 考虑 $X'' = \mathrm{Bl}_{Z'} X' \to X'$. 则存在有限表现的闭子概形 $Y \subset X$ 使得

*(a)* 在集合论意义下 $Y = Z \cup b(Z')$;

*(b)* 复合 $X'' \to X$ 同构于 $\mathrm{Bl}_Y X \to X$.

证明. □

## 2.2 概形爆破和 strict 变换

**定义 2.10.** 考虑爆破 $b : \mathrm{Bl}_Z(S) = S' \to S$ 和例外除子 $E = b^{-1}(Z)$. 对任意的 $f : X \to S$, 考虑拉回图

$$\begin{tikzcd} \mathrm{pr}_{S'}^{-1}E \arrow[r] \arrow[d] & X \times_S S' \arrow[r, "\mathrm{pr}_X"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{S'}"] & X \arrow[d, "f"] \\ E \arrow[r, hook] & S' \arrow[r, "b"] & S \end{tikzcd}$$

则 *(i)* 拟凝聚 $\mathscr{O}_X$-模 $\mathscr{F}$ 的 *strict* 变换定义为

$$\frac{\mathrm{pr}_X^*\mathscr{F}}{\text{支撑在}\mathrm{pr}_{S'}^{-1}E\text{上的截面生成的子模}};$$

*(ii)* 而 $X$ 的 *strict* 变换定义为闭子概形 $X' \subset X \times_S S'$, 对应于支撑在 $\mathrm{pr}_{S'}^{-1}E$ 的 $\mathscr{O}_{X\times_S S'}$ 的截面生成的理想.

**注 2.11.** 事实上这样的层是拟凝聚需要讨论一番, 当然此时 *(ii)* 是 *(i)* 的特例, 故我们只看 *(i)*. 事实上, 显然 $\mathrm{pr}_{S'}^{-1}E$ 也是局部主的闭子概形, 故 $j : X \times_S S' - \mathrm{pr}_{S'}^{-1}E \to X \times_S S'$ 是仿射的 (因为局部是主开集), 所以自然是拟紧分离的 (这里只用 *qcqs*). 假设考察的层为 $\mathrm{pr}_X^*\mathscr{F}/\mathscr{G}$, 则只需证明 $\mathscr{G}$ 拟凝聚. 注意到有正合列

$$0 \to \mathscr{G} \to \mathrm{pr}_X^*\mathscr{F} \to j_*j^*(\mathrm{pr}_X^*\mathscr{F}),$$

于是命题成立.

**定理 2.12.** 考虑定义*2.10*的情况, 则 $X$ 的 *strict* 变换 $X' \cong \mathrm{Bl}_{f^{-1}(Z)}(X)$.

证明. 设 $X'' := \mathrm{Bl}_{f^{-1}(Z)}(X)$, 根据爆破的泛性质我们得到如下交换图, 进而得到 $X'' \to$

$X \times_S S'$:

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\ & X \times_S S' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ & S' \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

则只需证明 $X'' \to X \times_S S'$ 是闭浸入且像为 $X'$. 由于是局部的, 不妨设 $S = \mathrm{Spec}(A)$ 和 $X = \mathrm{Spec}(B)$ 且 $Z$ 对应 $I \subset A$. 设 $J = IB$, 则 $X'' \to X \times_S S'$ 有对应于 $B \otimes_A \bigoplus_{d \geq 0} I^d \to \bigoplus_{d \geq 0} J^d$, 故为一个闭浸入, 接下来证明其像为 $X'$.

取 $a \in I$ 考虑仿射 Rees 谱 $\mathrm{Spec}(A[\frac{I}{a}]) \subset S'$, 我们考虑其在 $X'$ 内的逆像, 事实上 $x \in \mathscr{G}(S')$ 当且仅当 $V(\mathrm{ann}(x)) \subset V(I)$ 当且仅当 $x$ 是 $a$-高次挠元, 则此逆像为

$$\mathrm{Spec}(B') = \mathrm{Spec}\, \frac{B \otimes_A A[\frac{I}{a}]}{a - \text{高次挠元}},$$

另外注意到其在 $X''$ 逆像为 $\mathrm{Spec}(B[\frac{I}{b}])$, 其中 $b$ 是 $a$ 像. 则根据第一节的交换代数命题知结论成立. □

这是比较一般的定义, 事实上我们一般都是考虑 $X$ 为 $S$ 闭子概形的情况. 根据定义下面的注记, $X$ 的 strict 变换即为概形论闭包 $\overline{b^{-1}(X-Z)}^s$, 但根据定理, 这个也是 $\mathrm{Bl}_{X \cap Z}(X)$, 故我们得到

$$\mathrm{Bl}_{X \cap Z}(X) \cong \overline{b^{-1}(X-Z)}^s.$$

### 2.3 $U$-admissible 爆破和延展性

**定义 2.13.** *考虑开子概形 $U \subset X$, 我们称映射 $b : X' \to X$ 是 $U$-admissible 爆破, 如果存在有限型的闭子概形 $Z \subset X$ (我们用了 [2] 内的定义, 而 [4] 的定义是有限表现) 使得 $Z \cap U = \emptyset$ 且 $X' \cong \mathrm{Bl}_Z(X)$.*

我们只考虑一种延伸性, 对于 $U$-admissible 爆破的更多性质, 参见 [4] 的相关章节. 下面的延展性事实上特殊情况就是 [3] 的 II.7.17.3.

**定理 2.14.** *考虑 $f : X \to S$, 取有限型 $\mathscr{O}_S$-模 $\mathscr{E}$, $\mathscr{O}_X$-线丛 $\mathscr{L}$ 和同态 $u : f^*\mathscr{E} \to \mathscr{L}$. 设 $U = X - \mathrm{supp}(\mathrm{coker}(u))$. 根据 $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ 的可表性, 存在唯一的 $r : U \to P := \mathbf{P}(\mathscr{E})$ 使得 $r^*\mathscr{O}_P(1) \cong \mathscr{L}|_U$.*

则存在 *U-admissible* 爆破 $b : X' \to X$ 和态射 $r' : X' \to \mathbf{P}(\mathscr{E})$ 使得通过同构 $b^{-1}(U) \cong U$ 我们得到 $r'|_{b^{-1}(U)} = r$, 也就是下图

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "b"'] \arrow[drr, "r'"] & & \\ X & U \arrow[l, hook'] \arrow[r, "r"'] & \mathbf{P}(\mathscr{E}) \end{tikzcd}$$

证明. 知 $\mathscr{F} = \mathrm{Im}(u) \subset \mathscr{L}$ 为有限型拟凝聚层, 设 $\mathscr{I} := \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{-1} \subset \mathscr{O}_X$ (这是因为 $\mathbf{P}(\mathscr{O}_X) \cong \mathbf{P}(\mathscr{L})$ 诱导了 (对射影丛用 $id_X$ 的泛性质) 从 $\mathscr{O}_X$ 的子模到 $\mathscr{L}$ 的子模的双射 $\mathscr{U} \mapsto \mathscr{U} \otimes \mathscr{L}$). 则不难看出设 $Z$ 是 $\mathscr{I}$ 对应闭子概形, 则 $X - Z = U$.

考虑 $U$-admissible 爆破 $b : X' = \mathrm{Bl}_Z(X) \to X$, 则知 $\mathscr{I}_{b^{-1}(Z)}$ 是 $X'$-线丛, 则对应的 $\mathscr{L}' := \mathscr{I}_{b^{-1}(Z)} \otimes b^*\mathscr{L}$ 也是线丛. 因为 $\mathscr{L}' = \mathrm{Im}(b^*(f^*\mathscr{E}) \to b^*\mathscr{L})$, 故得到满射 $(f \circ b)^*\mathscr{E} \to \mathscr{L}'$, 进而得到 $r' : X' \to \mathbf{P}(\mathscr{E})$. 由于 $\mathscr{L}'|_{b^{-1}(U)} = b^*\mathscr{L}|_{b^{-1}(U)}$, 则命题成立. □

### 2.4 (*) 更加几何的结论——爆破和奇点消解

这里只列举这一个著名结论 (的稍微现代写法). 对于一个既约诺特概形 $X$, 它的一个奇点消解是一个紧合双有理映射 $f : X' \to X$ 使得 $X'$ 正则.

**定理 2.15** (Hironaka)**.** *假设 $X$ 是既约优等概形使得对于任何 $x \in X$ 使得 $\kappa(x)$ 是特征零 (比如 $X$ 是既约有限型 $k$ 概形, 且 $k$ 是特征零的域), 则 $X$ 有奇点消解.*

*事实上 Hironaka 证明了存在列*

$$X' = X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 = X$$

*使得 $X'$ 正则, 且每个 $X_{i+1} \to X_i$ 都是某个闭子概形 $D_i \subset X_i$ 的爆破, 且满足*

*(i) $D_i$ 正则且在 $X_i$ 的非正则 locus 内;*

*(ii) $\mathscr{O}_{D_i}$ 模 $\bigoplus_{d \geq 0} \mathscr{I}_{D_i}^d / \mathscr{I}_{D_i}^{d+1}$ 平坦.*

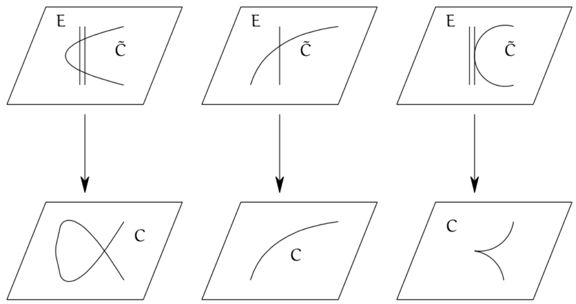
## 3 爆破的例子

### 3.1 曲线的正规化和爆破

### 3.2 爆破的具体计算

我们主要的例子来源是 [5] 和 [1]. 我们为了方便, 只考虑域 $k$ 都是特征零代数闭域.

**例 1** (结点三次曲线和尖点曲线的奇点消解). *(i) 考虑仿射平面 $\mathbb{A}_k^2$ 内的结点三次曲线 $C: y^2 = x^2 + x^3$. 显然原点是奇异点, 我们在此点做爆破. 设 $R = k[x,y]/(y^2 - x^2 - x^3)$, 不难计算得到爆破结果为 $V_+(zy - wx) \subset \mathbb{P}_R^1 = \mathbb{P}^1 \times C$. 我们只看仿射开集 $D_+(z)$ 上的情况, 计算得到 $D_+(z) \cong \operatorname{Spec} k[x,t]/(t^2x^2 - x^2 - x^3)$, 为两个不可约分支 $x^2 = 0$(例外除子的一部分) 和 $t^2 - 1 - x$(Strict 变换的一部分), 即为下图第一张图所示:*




*(ii) 考虑尖点曲线 $C: y^2 = x^3$, 显然原点是奇异点, 我们在此点做爆破. 设 $R = k[x,y]/(y^2 - x^3)$, 不难计算得到爆破结果为 $V_+(zy - wx) \subset \mathbb{P}_R^1 = \mathbb{P}^1 \times C$. 我们只看仿射开集 $D_+(z)$ 上的情况, 计算得到 $D_+(z) \cong \operatorname{Spec} k[x,t]/(t^2x^2 - x^3)$, 为两个不可约分支 $x^2 = 0$(例外除子的一部分) 和 $t^2 - x$(Strict 变换的一部分), 即为上图第三张图所示.*

*(iii) 作为对比, 考虑非奇异曲线 $C: y^2 = x^2 - x$, 不难计算爆破结果在仿射开集上相当于一个例外除子并集一个同构自己的 Strict 变换, 即为上图第二张图所示.*

**例 2.** 考虑 $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^2 = \operatorname{Proj} R$, 取 $\mathfrak{p} = (x_0, x_1)$ 对应于 $x = (0:0:1)$, 我们计算在此点处的爆破. 考虑满射

$$R[u,v] \to \operatorname{Bl}_{\mathfrak{p}} R = \bigoplus_{d \geq 0} \mathfrak{p}^d, u \mapsto x_0, v \mapsto x_1,$$

则得到分次环同构 $R[u,v]/(ux_1 - vx_0) \cong \operatorname{Bl}_{\mathfrak{p}} R$, 从而得到 $\operatorname{Bl}_x(l_x(\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^2) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}^1 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ 为闭子概形.

**例 3** (Hirzebruch 曲面和爆破). 设 $p$ 是 $\mathbb{P}_k^2$ 的一个 $k$-值点, 则有同构

$$\operatorname{Bl}_p \mathbb{P}_k^2 \cong \mathbf{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1)),$$

为 *Hirzebruch* 曲面 $\mathbb{F}_1$.

未完待续...

**例 4** (二次锥面和爆破). 考虑二次锥面 $Q = \operatorname{Spec}(S) := \operatorname{Spec} k[x,y,z]/(xz - y^2)$, 根据 *[3]* 的 *II.6.5.2* 和 *II.6.11.3*, 我们得知 $l = V(x,y)$ 是 *Weil* 除子而不是 *Cartier* 除子. 接

下来探究爆破 $\mathrm{Bl}_l\, Q$ 会发生什么? 形式上来讲, 假设爆破为 $\pi : \mathrm{Bl}_l\, Q \to Q$, 则 $\pi^{-1}(l)$ 作为例外除子是 *Cartier* 除子, 也就是说 $\pi$ 将 *Cartier* 除子映为非 *Cartier* 除子, 接下来我们详细计算.

事实上不难看出

$$X := \mathrm{Bl}_l\, Q \cong \mathrm{Proj} S[w_0, w_1]/(yw_0 - zw_1, xw_0 - yw_1),$$

我们断言 $X$ 是非奇异簇. 事实上考虑仿射开集 $D_+(w_0)$, 则注意到

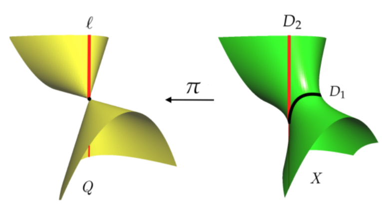
$$\begin{aligned} D_+(w_0) &\cong \mathrm{Spec}(S[w_0, w_1]/(yw_0 - zw_1, xw_0 - yw_1))_{(w_0)} \\ &\cong \mathrm{Spec}\, \frac{S\left[\frac{w_1}{w_0}\right]}{\left(y - z\frac{w_1}{w_0}, x - y\frac{w_1}{w_0}\right)} \cong \mathrm{Spec}\, k[z]\left[\frac{w_1}{w_0}\right] \cong \mathbb{A}_k^2, \end{aligned}$$

同理 $D_+(w_0) \cong \mathbb{A}_k^2$, 则 $X$ 必然非奇异. 所以事实上此时抛弃掉爆破的性质, $D = \pi^{-1}(l)$ 仍然是 *Cartier* 除子.

另外, 我们想要看看 $D$ 在 $X$ 内的情况. 事实上 $D$ 作为闭子概形在 $X$ 内也由 $(x, y)$ 生成, 注意到现在底环为 $S[w_0, w_1]/(yw_0 - zw_1, xw_0 - yw_1)$, 在其内我们发现

$$(x, y) = (x, y, z) \cap (x, y, w_1),$$

则 $D$ 有两个不可约分支为 $D_1 = V(x, y, z), D_2 = V(x, y, w_1)$, 如图所示:




这样我们就知道了 $D$ 的情况. 事实上经过在仿射开集上的分析, 我们也能直接证明 $D$ 是 *Cartier* 除子.

另外可计算得 $\mathrm{Bl}_{(0,0,0)}\, S \cong \mathrm{Bl}_l\, S$, 因此爆破不同的闭子概形可能得到相同的结果.

**例 5** (非奇异爆破得奇异)**.** 事实上对于非奇异簇在非既约的闭子概形的爆破可能会得到奇异概形. 考虑 $P = \mathbb{A}_k^2$ 在 $Z = V(x^2, y)$ 处爆破, 则得到

$$\mathrm{Bl}_Z(P) \cong V_+(yz - x^2 w) \subset \mathbb{P}^1_{k[x,y]} = \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1.$$

考虑仿射开集并计算得到 $D_+(z) \cong \mathrm{Spec}\, k[x, \frac{w}{z}] \cong \mathbb{A}^2$ 且 $D_+(w) \cong \mathrm{Spec}\, k[x, y, \frac{z}{w}]/(y\frac{z}{w} - x^2)$, 由 *[3]* 的 *II.6.5.2* 知 $D_+(w)$ 为二次锥面必然奇异*!*

**例 6.** 未完待续...

# 参考文献

[1] Geir Ellingsrud and John Christian Ottem. *Introduction to Schemes.* Version 2.2, 24th June 2022.

[2] Ulrich Görtz and Torsten Wedhorn. *Algebraic Geometry I: Schemes*. Springer, 2020.

[3] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer, 1977.

[4] Stacks project collaborators. Stacks project. https://stacks.math.columbia.edu/. 2022.

[5] Ravi Vakil. *THE RISING SEA: Foundations of Algebraic Geometry.* Preprint, August 29, 2022 draft.