复流形基础

温尊

1 Hodge 理论基础及其应用

定义 1.1. 对 *Hermitian* 流形 (X,g), 我们定义 $d-$ 调和形式为 $\mathscr{H}^k(X,g)=\{\alpha\in\mathscr{A}^k:\Delta\alpha=0\}$, 其余的 $\mathscr{H}^k_{\overline{\partial}}(X,g)$ 和 $\mathscr{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X,g)$ 也是如此.

定理 1.2 (Hodge 分解定理)**.** 若 (X,g) 是紧 *Hermitian* 流形, 则有相互正交的分解:

$$\mathscr{A}^{p,q}(X)=\partial\mathscr{A}^{p-1,q}(X)\oplus\mathscr{H}^{p,q}_{\partial}(X,g)\oplus\partial^*\mathscr{A}^{p+1,q}(X),$$

$$\mathscr{A}^{p,q}(X)=\overline{\partial}\mathscr{A}^{p-1,q}(X)\oplus\mathscr{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X,g)\oplus\overline{\partial}^*\mathscr{A}^{p+1,q}(X);$$

另外, 我们有

$$\ker\partial=\partial\mathscr{A}^{p-1,q}(X)\oplus\mathscr{H}^{p,q}_{\partial}(X,g),\ker\overline{\partial}=\overline{\partial}\mathscr{A}^{p-1,q}(X)\oplus\mathscr{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X,g).$$

证明. 我们只用 Hodge 分解定理的主体部分来证明 $\ker\overline{\partial}=\overline{\partial}\mathscr{A}^{p-1,q}(X)\oplus\mathscr{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X,g)$, 另一个同理. 我们知道 $\overline{\partial}\mathscr{A}^{p-1,q}(X)\oplus\mathscr{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X,g)\subset\ker\overline{\partial}$. 另一方面, 我们断言 $\overline{\partial}\overline{\partial}^*\beta=0$ 当且仅当 $\overline{\partial}^*\beta=0$, 事实上这是因为 $\overline{\partial}\overline{\partial}^*\beta=0$ 蕴含 $0=(\overline{\partial}\overline{\partial}^*\beta,\beta)=\|\overline{\partial}^*\beta\|^2$, 则 $\overline{\partial}^*\beta=0$. 那么由 Hodge 分解定理, 如果 $\overline{\partial}^*\beta\in\ker\overline{\partial}$, 则得到 $\overline{\partial}^*\beta=0$, 故得证. □

命题 1.3. 设 (X,g) 是紧 *Hermitian* 流形, 则典范投影 $\mathscr{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X,g)\to H^{p,q}(X)$ 是同构.

证明. 取 $\alpha\in\mathscr{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X,g)$, 则 $\overline{\partial}\alpha=0$, 故典范投影为将其映射到 Dolbeault 上同调类 $[\alpha]\in H^{p,q}(X)$. 由 Hodge 分解定理我们知道 $\ker\overline{\partial}=\overline{\partial}\mathscr{A}^{p-1,q}(X)\oplus\mathscr{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X,g)$, 则这个命题显然成立. □

Hodge 分解定理是 Hodge 理论在紧 Hermitian 流形上的主要结果之一, 但如果我们考虑紧 Kähler 流形, 则有一些非常美妙和重要的性质, 下面是一些重要结果.

命题 1.4. 设 (X,g) 是紧 *Kähler* 流形, 对于 $d-$ 闭形式 $\alpha\in\mathscr{A}^{p,q}(X)$, 则 α 是 $d-$ 正合的当且仅当是 $\partial-$ 正合的当且仅当是 $\overline{\partial}-$ 正合的当且仅当是 $\partial\overline{\partial}-$ 正合的.

证明. 略. □

定理 1.5 (紧 Kähler 流形的 Hodge 分解)**.** 设 (X,g) 是紧 *Kähler* 流形, 则有分解

$$H^k(X,\mathbb{C})=\bigoplus_{p+q=k}H^{p,q}(X),$$

并且这个分解不依赖于选取的 *Kähler* 结构.

证明. 由于 (X,g) 是紧 Kähler 流形, 那么有

$$H^k(X,\mathbb{C}) = \mathscr{H}^k(X,g) = \bigoplus_{p+q=k} \mathscr{H}^{p,q}(X,g) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X),$$

若 X 上由另一个 Kähler 度量 g', 则显然 $\mathscr{H}^{p,q}(X,g) \cong H^{p,q}(X) \cong \mathscr{H}^{p,q}(X,g')$, 那取 $\alpha \in \mathscr{H}^{p,q}(X,g)$, 对应了 $\alpha' \in \mathscr{H}^{p,q}(X,g')$, 则我们只需证明其对应的 de Rham 上同调类 $[\alpha],[\alpha'] \in H^k(X,\mathbb{C})$ 是相同的. 由 $[\alpha]=[\alpha'] \in H^{p,q}(X)$, 则 $\alpha' = \alpha + \overline{\partial}\gamma$, 则有 $\overline{\partial}\gamma \in \ker d$, 那么用关于 d 的 Hodge 分解我们知道 $\overline{\partial}\gamma \in \mathrm{Im} d \oplus \mathscr{H}^k(X,g)_{\mathbb{C}}$, 而且注意到 $(\overline{\partial}\gamma,\theta) = (\gamma, \overline{\partial}^*\theta) = 0$, 则 $\overline{\partial}\gamma$ 和 $\mathscr{H}^k(X,g)_{\mathbb{C}}$ 正交, 故 $\overline{\partial}\gamma \in \mathrm{Im} d$, 则定理成立. □

定义 1.6. *设 (X,g) 是紧 Kähler 流形, 则其本原上同调定义为*

$$H^k(X,\mathbb{R})_p = \ker(\Lambda : H^k(X,\mathbb{R}) \to H^{k-2}(X,\mathbb{R})),$$

$$H^{p,q}(X)_p = \ker(\Lambda : H^{p,q}(X) \to H^{p-1,q-1}(X)).$$

定理 1.7 (Hard Lefschetz 定理)**.** *设 (X,g) 是 n 维紧 Kähler 流形, 则对 $k \le n$ 有*

$$L^{n-k} : H^k(X,\mathbb{R}) \cong H^{2n-k}(X,\mathbb{R}),$$

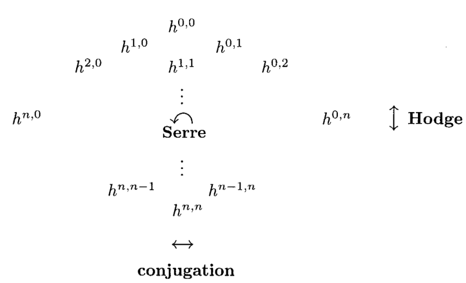
且

$$H^k(X,\mathbb{R}) = \bigoplus_{i\ge 0} L^i H^{k-2i}(X,\mathbb{R})_p.$$

当然这些分解和 (p,q) 型有关, 例如 $H^k(X,\mathbb{R})_p \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)_p$.

事实上 Hodge $*$ 算子也有 $* : H^{p,q}(X) \cong H^{n-q,n-p}(X)$, 我们不再赘述.

我们有一张很好的图来总结一些对偶, 我们用 Hodge 数 $h^{p,q} = \dim H^{p,q}(X)$ 来完成这张基于紧 Kähler 流形上的图, 其中 Serre 对偶为 $H^{p,q}(X) \cong H^{n-p,n-q}(X)^*$, 而 Hodge $*$ 对偶为 $* : H^{p,q}(X) \cong H^{n-q,n-p}(X)$, 共轭作用为 $\overline{H^{p,q}(X)} = H^{q,p}(X)$:



命题 1.8 (Hodge 指标定理)**.** *设 (X,g) 是紧 Kähler 曲面, 则相交对*

$$H^2(X,\mathbb{R}) \times H^2(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, (\alpha,\beta) \mapsto \int_X \alpha \wedge \beta$$

的指标是 $(2h^{2,0}+1, h^{1,1}-1)$.

证明. 注意到 $H^2(X,\mathbb{R}) = \big((H^{2,0}(X)\oplus H^{0,2}(X))\cap H^2(X,\mathbb{R})\big)\oplus H^{1,1}(X)$, 取 α 为 $H^{2,0}(X)\oplus H^{0,2}(X)$ 中元素, 注意到这里面全是本原上同调类, 设 $\alpha=\alpha^{2,0}+\alpha^{0,2}$, 则

$$\int_X \alpha^2 = 2\int_X \alpha^{2,0}\wedge\alpha^{0,2} = 2\int_X \alpha^{2,0}\wedge\overline{\alpha^{2,0}} > 0,$$

我们只需考虑 $H^{1,1}(X)$, 由 Lefschetz 分解我们得到

$$H^{1,1}(X) = H^{1,1}(X)\oplus LH^0(X) = H^{1,1}(X)\oplus[\omega]\mathbb{R},$$

由 Hodge $*$ 对偶和分解的正交性我们得到 $\int_X \omega\wedge\alpha = 0$. 而且显然 $\int_X \omega^2>0$, 由 Hodge-Riemann 我们得到 $\int_X \alpha^2 < 0$, 所以命题成立. □

2 消灭定理

2.1 Bochner 消灭定理——杀掉全纯截面

Bochner 的工作告诉我们, 对于一个复流形上的全纯向量丛, 给定 Hermitian 度量和 Chern 联络, 那么通过控制其平均曲率为半负定乃至负定, 可以使得向量丛的全纯截面都平行, 而且截面处的平均曲率为零, 乃至让向量丛的全纯截面消失.

设 $E\to M$ 为全纯向量丛, 考虑度量 h 和对应的 Chern 联络 D 和曲率 $R=D^2$. 考虑全纯局部标架场 $s_1,...,s_r$ 及其对偶标架 $t_1,...,t_r$, 对光滑截面 ξ 可以写为 $\xi=\sum_i \xi^i s_i$. 另外给定 M 上的局部坐标卡 $z^1,...,z^n$.

由于 D 是 Chern 联络, 那么 $D\xi = D'\xi+\overline{\partial}\xi = \sum_i(\partial\xi^i+\sum_j\omega^i_j\xi^j+\overline{\partial}\xi^i)$. 那我们可以假设 $\partial\xi^i+\sum_j\omega^i_j\xi^j = \sum\nabla_\alpha\xi^i dz^\alpha$ 且 $\overline{\partial}\xi^i=\sum\nabla_{\bar\beta}\xi^i d\bar z^\beta$. 设 Ω^i_j 是曲率形式, 设 $\Omega^i_j=\sum R^i_{j\alpha\bar\beta}dx^\alpha\wedge d\bar z^\beta$.

接下来考虑 M 上的 Hermitian 度量 $g=\sum g_{\alpha\bar\beta}dz^\alpha\wedge d\bar z^\beta$, 如果假设 $K^i_j=\sum g^{\alpha\bar\beta}R^i_{j\alpha\bar\beta}$, $K_{j\bar k}=\sum h_{i\bar k}K^i_j$, 那么称 $K=(K^i_j), \widehat{K}=(K_{j\bar k})$ 分别为平均曲率变换和平均曲率形式, 他们分别的作用为 $K(\xi)=\sum K^i_j\xi^j s_i, \widehat{K}(\xi,\eta)=\sum K_{j\bar k}\xi^j\bar\eta^k$.

事实上我们不难计算得到下面命题

命题 2.1. 取全纯截面 ξ, 则有

$$\frac{\partial^2 h(\xi,\xi)}{\partial z^\alpha\partial\bar z^\beta} = \sum h_{i\bar j}\nabla_\alpha\xi^i\nabla_{\bar\beta}\bar\xi^j - \sum h_{i\bar k}R^i_{j\alpha\bar\beta}\xi^j\bar\xi^k.$$

通过两边取迹可以得到

命题 2.2 (Weitzenböck Formula)**.** 取全纯截面 ξ, 则有

$$\sum g^{\alpha\bar\beta}\frac{\partial^2 h(\xi,\xi)}{\partial z^\alpha\partial\bar z^\beta} = \|D'\xi\|^2 - \widehat{K}(\xi,\xi),$$

其中 $\|D'\xi\|^2=\sum h_{i\bar j}g^{\alpha\bar\beta}\nabla_\alpha\xi^i\nabla_{\bar\beta}\bar\xi^j$.

这时对这个式子用 Hopf 最大值原理我们就可以很容易的得到主要结论:

定理 2.3 (BOCHNER 消灭定理)**.** *对紧复流形 M 上的全纯向量丛 E, 如果 D 是其 Chern 联络且 $R, \widehat{K}$ 是其曲率和平均曲率形式.*

(i) 如果 $\widehat{K}$ 处处半负定, 则对其任意的全纯截面 ξ, 我们有

$$D\xi = 0, \widehat{K}(\xi, \xi) = 0;$$

(ii) 如果 $\widehat{K}$ 满足 (i) 条件, 且在某点严格负定, 那么 E 无非零全纯截面.

现在我们考虑一个重要的特例, 考虑紧 Kähler 流形. 因为 M 上的度量 g 可以诱导切丛和余切丛上的度量, 我们在 TM 上定义 Ricci 曲率为 $\mathrm{Ric} = \sum R_{k\bar{h}} dz^k \otimes d\bar{z}^h$, 其中 $R_{k\bar{h}} = \sum R^i_{ik\bar{h}}$, 由 Kähler 条件得知在 TM 上 $R_{i\bar{j}} = K_{i\bar{j}}$, 则 $\mathrm{Ric} = \widehat{K}$. 那么在 $(T^*M)^{\otimes p}$ 上用 BOCHNER 消灭定理可以得到著名结论:

推论 2.4. *设 $p > 0$, 若紧 Kähler 流形的 Ricci 曲率处处半正定, 那么 $(T^*M)^{\otimes p}$ 的所有全纯截面都平行. 如果更多的, 在某点严格正定, 则 $(T^*M)^{\otimes p}$ 无非零全纯截面.*

特别的, 如果 Ricci 曲率处处半正定, 那么 M 上所有 $(p, 0)$-形式都平行 $(p > 0)$. 如果更多的, 在某点严格正定, 那么 $H^{p,0}(M) = 0, p > 0$.

注 2.5. *(i) 根据 Hodge Diamond, 容易知道 (只是共轭) $H^{p,0}(M) = H^{0,p}(M) = 0, p > 0$.*

(ii) 所以对于 Kähler-Einstein 流形 (满足 $\mathrm{Ric}(\omega) = \omega$), 有 $H^{p,0}(M) = 0, p > 0$.

2.2 KODAIRA-NAKANO 消灭定理

线丛的消灭定理最著名的结果莫过于这个定理.

定理 2.6 (KODAIRA-NAKANO 消灭定理)**.** *对紧 Kähler 流形 M, 如果 L 为全纯 Positive 线丛, 那么如果 $p + q > n$, 则*

$$H^q(M, \Omega^p_M \otimes L) = 0.$$

(事实上紧复流形 M, 如果 L 为全纯 Positive 线丛, 那么 M 一定是 Kähler 的, 这个得益于 $c_1(L)$ 正定, 可以充当 Kähler 形式) 这个定理的证明主要得益于紧 Kähler 流形上的一系列算符的等式和不等式. 事实上在流形上任意全纯向量丛 E 我们熟知有 Kähler 等式 $[\Lambda, L] = (n - p - q)\mathrm{id}$ 和 $[\Lambda, \overline{\partial}] = -i\partial^*$. 另外事实上 Nakano 证明了 E 上面的 Chern 联络 D 满足 $[\Lambda, \overline{\partial}_E] = -i(D')^* = i(\bar{*}_{E^*} \circ D'_{E^*} \circ \bar{*}_E)$. 如果进而考虑 R 为其曲率, 那么对于任何调和形式 $\alpha \in \mathscr{H}^{p,q}(M, E)$ 都有 (经过一些分析和计算)$\frac{i}{2\pi}(R\Lambda(\alpha), \alpha) \leq 0$ 且 $\frac{i}{2\pi}(\Lambda R(\alpha), \alpha) \geq 0$.

有了这些工具我们就可以来证明 KODAIRA-NAKANO 消灭定理. 选取度量使得 $\frac{i}{2\pi}R$ 为 M 的 Kähler 形式, 那么 L 就是 $\frac{i}{2\pi}R$, 那么任取 $\alpha \in \mathscr{H}^{p,q}(M, L)$ 有

$$0 \leq \frac{i}{2\pi}([\Lambda, R](\alpha), \alpha) = ([\Lambda, R]\alpha, \alpha) = (n - p - q)\|\alpha\|^2,$$

那么如果 $p + q > n$, 那么 $\alpha = 0$. 根据 Hodge 定理得到 $H^q(M, \Omega^p_M \otimes L) = 0$.

事实上有更推广的结果如下, 我们不再赘述, 感兴趣者请看 [3].

定理 2.7 (Gigante-Girbau 消灭定理)**.** *设 L 是紧 Kähler 流形 X 上的全纯线丛, 如果 $c_1(L)$ 半负定, 而且 $\operatorname{rank}(c_1(L)) \geq k$, 那么*

$$H^q(X, \Omega^p \otimes L) = 0, p + q \leq k - 1.$$

作为 Kodaira-Nakano 消灭定理推论事实上还有著名的 Weak Lefschetz 定理:

定理 2.8 (Weak Lefschetz 定理)**.** *对 n 维紧 Kähler 流形 X, 设 $Y \subset X$ 为光滑超曲面使得 $\mathscr{O}(Y)$ positive, 则典范限制映射*

$$H^k(X, \mathbb{C}) \to H^k(Y, \mathbb{C})$$

在 $k \leq n-2$ 时为双射, 在 $k = n-1$ 时为单射.

这个最标准的证明就是先用 Hodge 分解定理将其转化为 $H^q(X, \Omega^p_X) \to H^q(Y, \Omega^p_Y)$ 的情况, 然后注意到 $\mathscr{O}_X(-Y) = \mathscr{I}_Y$ 和 $\mathscr{O}_Y(Y) = \mathscr{N}_{Y/X}$, 那么会有两个著名的正合列, 之后用 Serre 对偶和 Kodaira-Nakano 消灭定理得到某个上同调为零, 然后考虑之前 $\mathscr{O}_X(-Y)$ 诱导短正合列引出的长正合列, 就可以看到 $H^q(X, \Omega^p_X) \to H^q(Y, \Omega^p_X|_Y)$ 有定理描述的样子, 之后考虑自然映射 $H^q(Y, \Omega^p_X|_Y) \to H^q(Y, \Omega^p_Y)$, 这个事实上先考虑映射的 kernel 和 cokernel 为 $\Omega^{p-1}_Y(-Y)$ 的元素, 然后用 $\mathscr{O}_Y(Y)$ 诱导短正合列引出的长正合列, 之后操作和之前类似, 这样就证明了定理.

神奇的是, 这个定理有一个 Morse 理论的证明, 线丛 $\mathscr{O}(Y)$ 存在整体截面 s 满足诱导除子为 $z(s) = Y$, 这个很容易做到. 考虑线丛上的度量为 $\frac{i}{2\pi} R^{\mathscr{O}(Y)} = \frac{i}{2\pi} \partial\overline{\partial} \log |s|^{-2}$, 那么考虑 $\phi : X \to [-\infty, \infty)$ 为 $\phi(x) = \log |s|^2$, 注意到 $\phi^{-1}(-\infty) = Y$, 我们将其视作一个 Morse 函数, 可以发现 Hessϕ 的负特征值个数至少是 n, 这说明 x 增大时, 是从 Y 粘至少 n 维胞腔, 这就得到纯粹拓扑上的解释, 这样的也增进了对 positive 线丛的一点理解.

定理 2.9 (Serre 消灭定理)**.** *设 $L \to X$ 是紧 Kaähler 流形上的 positive 线丛, 那么对任意的全纯向量丛 E, 存在 m_0 使得当 $q > 0, m \geq m_0$ 时有*

$$H^q(X, E \otimes L^m) = 0.$$

赋予 E, L 两个 Hermitian 度量, 考虑其 Chern 联络为 ∇_E, ∇_L, 且 R_L 诱导 X 上的 Kähler 形式 ω. 注意到 $E \otimes L^m$ 对应的联络为 $\nabla = \nabla_E \otimes 1 + 1 \otimes \nabla_{L^m}$. 事实上会发现 $\frac{i}{2\pi} R_{L^m} = m\omega$, 那么 $\frac{i}{2\pi} R = \frac{i}{2\pi} R_E \otimes 1 + m(1 \otimes \omega)$. 和 Kodaira 消灭定理的证明一样, 我们任取调和形式 $\alpha \in \mathscr{H}^{p,q}(X, E \otimes L^m)$, 那么仍有 Kähler 形式的不等式 $\frac{i}{2\pi}([\Lambda, R](\alpha), \alpha) \geq 0$, 简单计算不难得到

$$\frac{i}{2\pi}([\Lambda, R](\alpha), \alpha) = \frac{i}{2\pi}([\Lambda, R_E](\alpha), \alpha) + m(n-p-q)\|\alpha\|^2 \leq (C + m(n-p-q))\|\alpha\|^2,$$

于是取 $m_0 > C$ 即可得到 $H^q(X, E \otimes L^m \otimes K_X) = 0, m \geq m_0$, 只需要替换 E 为 $E \otimes K_X^*$ 即可. 这就完成了证明, 事实上这个和 Kodaira 消灭定理证明类似, 都是强迫调和形式变成零, 然后用 Hodge 定理.

通过 Riemann Roch 定理和 Serre 消灭定理, 我们可以对 $\mathbb{P}^1$ 上的向量丛分类:

定理 2.10 (Grothendieck 引理)**.** *任何 $\mathbb{P}^1$ 上的全纯向量丛都同构于 $\bigoplus \mathscr{O}(a_i)$.*

2.3 从线丛移植到向量丛上的消灭定理

定理 2.11. *假设 E 是复流形 X 的全纯向量丛, 设 $\mathscr{P}(E)=(E\backslash\{0\})/\mathbb{C}^*$, 那么设 $p:\mathscr{P}(E)\to X$. 设 $L(E)$ 是 $\mathscr{P}(E)$ 上的重言线丛, 其在 $\xi\in\mathscr{P}(E)$ 的纤维为 $L(E)_\xi$ 是在 $E_{p(\xi)}$ 内被 ξ 表示的复直线. 那么有自然同构:*

$$H^q(X,\Omega_X^p(E^*))=H^q(\mathscr{P}(E),\Omega^p_{\mathscr{P}(E)}(L(E)^*)).$$

证明细节见 [3], 我们略去. 我们现在可以把线丛的 Positive 那一套搬到一般的全纯向量丛上, 只需要考虑 $c_1(L(E))$ 的相关概念即可. 运用这个, 我们根据 GIGANTE-GIRBAU 消灭定理就得到

定理 2.12. *设 E 是紧 Kähler 流形 X 上的秩 r 全纯向量丛, 如果 E 是半负定且 $\operatorname{rank}(E)\geq k$, 那么*

$$H^q(X,\Omega^p(E))=0,p+q\leq k-r.$$

3 RIEMANNIAN-ROCH 定理

我们这节最主要的是如下 Hirzebruch 用配边理论证明的经典 Riemannian-Roch 的推广, 可以参考 [2]. 我们考虑紧复流形 X 上的全纯向量丛 E, 定义其 Euler-Poincaré 示性数 $\chi(X,E)=\sum_{j=0}^{\dim X}(-1)^jh^j(X,E)$.

定理 3.1 (HIRZEBRUCH-RIEMANN-ROCH 定理)**.** *对紧复流形 X 上的全纯向量丛 E, 则*

$$\chi(X,E)=\int_X \operatorname{ch}(E)\operatorname{td}(X),$$

其中 $\operatorname{ch}(E)$ 为 E 的 chern 特征标, 而 $\operatorname{td}(X)$ 是 X 的 todd 类.

这个著名的定理有相当多的应用, 其证明甚至启发了 Atiyah 证明 ATIYAH-SINGER 指标定理. 我们举一个例子来表明其威力:

例 3.2. *一个紧复曲面 X 我们称之为 $K3$ 曲面, 如果它满足 $K_X\cong\mathscr{O}_X$, 且 $h^1(X,\mathscr{O}_X)=0$. 我们现在要探究其 Betti 数和 Hodge 数. 首先要知道 Y.-T.Siu 在 1983 年 ([6]) 证明了所有 K3 曲面都是 Kähler 流形, 我们以这个为前提, 便于使用各种工具.*

事实上我们不难得到对于紧复曲面的 HIRZEBRUCH-RIEMANN-ROCH *定理 $\chi(X,\mathscr{O}_X)=\int_X\frac{c_1^2(X)+c_2(X)}{12}$. 计算形式 Chern roots 会得到对任何向量丛 $E\to X$, 都有 $c(\det E)=1+c_1(E)$. 另外, 对 n 维紧 Kähler 流形 X, 有 $e(X)=\int_X c_n(x)$, 其中 $e(X)=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^kb_k(X)$ 为 Euler 数 (Gauss-Bonnet).*

下面假设 X 是某个 K3 曲面, 那么我们有 $c_1(X)=-c_1(\Omega_X)=-c_1(K_X)=-c_1(\mathscr{O}_X)=0$, 接下来开始正题. 由连通性和 Poincaré 对偶我们知道 $b_0(X)=b_4(X)=1$ 且 $b_1(X)=b_3(X)$. 因为是 K3 曲面, 所以 $H^{0,1}(X)\cong H^1(X,\mathscr{O}_X)=0$, 从而 $h^{0,1}(X)=0$, 由共轭得到 $h^{1,0}(X)=0$. 用 Hodge 分解定理得知 $b_1(X)=b_3(X)=0$, 于是 $h^{2,1}(X)=h^{1,2}(X)=0$ 且 $h^{2,2}(X)=1$.

注意到 $H^0(X,\mathscr{O}_X)=\Gamma(X,\mathscr{O}_X)=\mathbb{C}$, 则由 Serre 对偶得到

$$H^2(X,\mathscr{O}_X)\cong H^0(X,K_X)^*=H^0(X,\mathscr{O}_X)^*=\mathbb{C},$$

于是 $\chi(X,\mathscr{O}_X)=2$. 由于 $\chi(X,\mathscr{O}_X)=\frac{1}{12}\int_X c_2(X)$, 于是 $\int_X c_2(X)=24$, 从而由 *Gauss-Bonnet* 得到 $e(X)=24$. 由于 $e(X)=2+b_2(X)$, 我们得到 $b_2(X)=22$. 之前有 $H^{0,2}(X)\cong H^2(X,\mathscr{O}_X)=\mathbb{C}$, 我们有 $h^{2,0}(X)=h^{0,2}(X)=1$, 故 $h^{1,1}(X)=20$, 这样我们得到结论.

其有两个方向的推广, 都是极为著名的结果:

定理 3.3 (Grothendieck-Riemann-Roch 定理)**.** *设 $f:X\to Y$ 是光滑射影簇之间的光滑射影映射, 则对于 X 上任意凝聚层 $\mathscr{F}$ 在 Chow 群 $\mathrm{CH}(Y)_{\mathbb{Q}}$(或者说 $H^*(Y,\mathbb{R})$) 内有*

$$\mathrm{ch}\left(\sum(-1)^i R^i f_*\mathscr{F}\right)\mathrm{td}(Y)=f_*(\mathrm{ch}(\mathscr{F})\mathrm{td}(X)).$$

我们考虑 $f:X\to\{point\}$, 则 $f_*=\int_X$ 且 $R^if_*\mathscr{F}=H^i(X,\mathscr{F})$, 由于 $\mathrm{td}(point)=1$ 且 $\mathrm{ch}(E_{point})=\dim E_{point}$, 这就得到 Hirzebruch-Riemann-Roch 定理.

定理 3.4 (Atiyah-Singer 指标定理)**.** *设 M 是紧可定向微分流形, E,F 是上面的两个向量丛, 考虑 $D:\Gamma(E)\to\Gamma(F)$ 是椭圆微分算子. 设解析指标 $\mathrm{index}(D)=\dim\ker D-\dim\mathrm{coker}D$ 和拓扑指标 $\gamma(D)$, 则*

$$\mathrm{index}(D)=\gamma(D).$$

在此处考虑算子 $\Delta_{\overline{\partial}_E}$ 即可得到 Hirzebruch-Riemann-Roch 定理.

4 Kodaira 嵌入定理

首先, 我们事实上熟知在复流形 X 上的全纯线丛 L, 假设 $s_0,...,s_N$ 是 $H^0(X,L)$ 的生成元, 那么有自然的全纯映射 $\phi_L: X\backslash\mathrm{Bs}(L)\to\mathbb{P}^N$ 为 $x\mapsto(s_0(x):\cdots,s_N(x))$, 且 $\phi_L^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}(1)\cong L|_{X\backslash\mathrm{Bs}(L)}$. 我们的想法就是用这个来将流形嵌入射影空间.

如果存在自然数 k 使得 $\phi_{L^k}:X\to\mathbb{P}^N$ 是嵌入, 那我们称 L 是丰沛的, 如果 $k=1$, 则 L 是极丰沛的. Kodaira 告诉我们, 事实上有如下结论:

定理 4.1 (Kodaira 嵌入定理)**.** *考虑紧 Kähler 流形上的全纯线丛 L, 那么 L 是 Positive 的当且仅当 L 是丰沛的. 所以在此情况下, 我们得到 X 是射影流形.*

这个证明的关键是分析映射 ϕ_L 何时是嵌入. 首先 $\mathrm{Bs}(L)=\emptyset$ 保证 ϕ_L 是个映射, 其次需要 ϕ_L 是单射, 然后是闭嵌入. 证明细节可以参考 [1] 或者 [4], 我们不在这里赘述 (事实上首先是用正合列等价表示 ϕ_L 是闭嵌入, 然后考虑用 Blow-up 手段和 Blow-up 前后的上同调关系).

推论 4.2. *对于紧 Kähler 流形 X, 其是射影流形当且仅当 Hodge 类 $\mathcal{K}_X\cap H^2(X,\mathbb{Z})\neq\emptyset$.*

证明. 这个事实上是 Lefschetz (1,1) 定理的直接推论, 这个定理告诉我们 $\mathrm{Pic}(X)\to H^{1,1}(X,\mathbb{Z})$ 是满的, 那么如果 $\mathcal{K}_X\cap H^2(X,\mathbb{Z})\neq\emptyset$, 就有线丛 L 使得 $c_1(L)$ 正定, 根据 Kodaira 嵌入定理就完成了证明. □

接下来考虑一个比较在意的问题, 就是典范的映射 $\mathrm{Div}(X)\to\mathrm{Pic}(X)$ 何时是满射?

推论 4.3. *如果紧复流形 X 是射影流形, 那么映射 $\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ 是满的.*

证明. 考虑 L 是 Positive 线丛, 那么根据 Serre 消灭定理得到对任何 $M \in \mathrm{Pic}(X)$ 和 $k \gg 0$ 都有 $\chi(X, M \otimes L^k) = h^0(X, M \otimes L^k)$. 注意到

$$\mathrm{ch}(M \otimes L^k) = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_1^j(M \otimes L^k)}{j!} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(c_1(M) + kc_1(L))^j}{j!},$$

根据 Hirzebruch-Riemann-Roch 定理就有 $\chi(X, M \otimes L^k) = \frac{1}{n!}\int_X c_1(L)^n k^n + \cdots$, 故其为最高次 n 次的系数为 $\frac{1}{n!}\int_X c_1(L)^n$ 的 k 的多项式. 事实上由于 L 是 Positive 线丛, 那么 $\frac{1}{n!}\int_X c_1(L)^n > 0$, 故 $H^0(X, M \otimes L^k) \neq 0$(特别的 $H^0(X, L^k) \neq 0$, 这个是证明的核心).

接下来就是熟悉的东西, 熟知存在非零截面 $s_1 \in H^0(X, M \otimes L^k)$ 和 $s_2 \in H^0(X, L^k)$ 使得 $\mathscr{O}(Z(s_1)) \cong M \otimes L^k, \mathscr{O}(Z(s_2)) \cong L^k$, 于是 $M \cong \mathscr{O}(Z(s_1) - Z(s_2))$, 所以是满的. $\square$

参考文献

[1] Daniel Huybrechts, *Complex Geometry, An Introduction*, Springer, 2004.

[2] F.Hirzebruch, *Topological Methods in Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1978.

[3] Shoshichi Kobayashi, *Differential Geometry of Complex Vector Bundles*, Princeton University Press, 1987.

[4] Phillip Griffiths, Joseph Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, 1978.

[5] Weiping Zhang, *Lectures On Chern-Weil Theory and Witten Deformations*, World Scientific, 2001.

[6] Y.-T.Siu, *Every K3 surface is Kähler*, Invent. math. 73, 135-150, 1983.