复变典型题选

刘晓龙 (19数学)

1、[第五届CMC决赛] 非常值 $f(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 上解析，当 $|z|=1$ 时 $|f(z)|=1$，证明：$f(\mathbb{D})=\mathbb{D}$.

(证明.) 首先，由极大模定理知 $f(\mathbb{D})\subseteq\mathbb{D}$，若 $\exists a\in\mathbb{D}$ 使 $a\notin f(\mathbb{D})$，考虑

$\boxed{g(z):=\dfrac{1-\bar{a}f(z)}{f(z)-a}}$，则 $\dfrac{1}{g(z)}$ 在 $\mathbb{D}$ 解析，且当 $|z|=1$ 时，$|g(z)|=1$，则由极大模

得 $|g(z)|\le 1$，$\left|\dfrac{1}{g(z)}\right|\le 1$，则 $|g(z)|=1 \Rightarrow g$ 在 $\mathbb{D}$ 上为常数，则 f 也在 $\mathbb{D}$ 上

为常数，这与题设矛盾. □

2、[第七届CMC决赛] 设 $f(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 上解析，且 $f(0)=0$，在 $\mathbb{D}$ 上有 $\operatorname{Re}f(z)\le 1$，证明：$\mathbb{D}$ 上有 $\operatorname{Re}f(z)\le\dfrac{2|z|}{1+|z|}$

(证明). 设 $\varepsilon>0$，$g(z)=1+\varepsilon-f(z)$，$g(0)>0$，$\operatorname{Re}g(z)>0$，则

$\left|\dfrac{g(z)-g(0)}{g(z)+g(0)}\right|^2<1$，故 $h=\dfrac{g(z)-g(0)}{g(z)+g(0)}:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ (轻易验证而得).

由 $h(0)=0$，由 Schwarz 引理 $\Rightarrow |h(z)|\le|z|$，再令 $\varepsilon\to 0^+$ 得 $\dfrac{|f(z)|}{|2-f(z)|}\le|z|$.

得到 $\underset{(1-|z|^2)(\operatorname{Re}f(z))^2}{\underset{\geq}{(1-|z|^2)|f(z)|^2}}\le 4|z|^2(1-\operatorname{Re}f(z))$，得 $\left(\operatorname{Re}f(z)+\dfrac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right)^2\le\dfrac{4|z|^2}{(1-|z|^2)^2}$

则 $\operatorname{Re}f(z)\le\dfrac{2|z|}{1-|z|^2}-\dfrac{2|z|^2}{1-|z|^2}=\dfrac{2|z|}{1+|z|}$. □

3. [第八届CMC决赛] 设 $f(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 上解析，且 $|f(z)|\le M$，证明：$|f'(0)|\le M-\dfrac{|f(0)|^2}{M}$.

(证明) $\varphi_M:=\dfrac{z-\frac{f(0)}{M}}{1-\frac{\overline{f(0)}}{M}z}$，则 $\varphi_M\circ\left(\dfrac{f}{M}\right):=h$，$h:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$，$h(0)=0$，

由 Schwarz 引理知 $|h(z)|\le|z|$，且 $|h'(0)|\le 1$，即 $\left|\dfrac{f'(0)M}{M^2-|f(0)|^2}\right|\le 1$.

即 $|f'(0)|M\le\left|M^2-|f(0)|^2\right|$，由 $|f(z)|\le M$ 得 $|f(0)|\le M$，则

$|f'(0)|\le M-\dfrac{|f(0)|^2}{M}$. □

4. [第九届CMC决赛] 设$f(z)$在$\mathbb{D}$上解析，在$\partial\mathbb{D}$连续，且$|z|=1$时$|f(z)|=1$，证明$f(z)$为有理函数

(证明) 设$z_1,\cdots,z_n$为$f(z)$在$\mathbb{D}$内零点（单零点，可重数），令$\varphi_k=\frac{z-z_k}{1-\bar{z}_k z}:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$.

令$F(z)=f(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\varphi_k(z)}=f(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\bar{z}_k z}{z-z_k}$，$F(z)$在$\mathbb{D}$上解析，且$|F(z)|>0$.

$\partial\mathbb{D}$上$|F(z)|=1$，对F与$\frac{1}{F}$用极大模$\Rightarrow F(z)\equiv C$，$|C|=1$，则有：

$$f(z)=F(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\bar{z}_k z}=C\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\bar{z}_k z}. \quad ✓. \quad \square$$

5. [第十届CMC决赛] 设z_0为$f(z)$的n阶极点. 证明：必存在$\rho>0$，$R>0$，

使得$\forall w\in\{w\in\mathbb{C}:|w|>R\}$，函数$f(z)-w$在$|z-z_0|<\rho$中有$n$个零点.

(证明) 则$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$，其中$\varphi(z_0)\neq0$. 且在$z_0$处解析，故必$\exists\rho>0$

使得$\varphi(z)$在$|z-z_0|<\rho$上解析，且$\varphi(z_0)\neq0$. 取$R=\max_{|z-z_0|=\rho}\left|\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}\right|$，

则在$|z-z_0|=\rho$上有$\left|\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}\right|\le R<|w|$，即$|\varphi(z)|<|w(z-z_0)^n|$.

由Rouché定理$\Rightarrow w(z-z_0)^n$零点个数与$\varphi(z)-w(z-z_0)^n$相同，

则在$|z-z_0|<\rho$内$\varphi(z)-w(z-z_0)^n$有n个零点，且均不为z_0（因$\varphi(z_0)\neq0$）.

则$f(z)-w$ …… . ✓. $\square$

6. [第十一届CMC决赛]. 设$f(z)$在$|z|\le R$ $(R>0)$内解析，且$|f(z)|\le M$ $(M>0)$.

且$f(0)\neq0$，证明：$f(z)$在$|z|\le\frac{R}{3}$内零点个数（记重数）不超过$\frac{1}{\ln2}\ln\frac{M}{|f(0)|}$.

(证明) 设f有n个零点$z_1,\cdots,z_n$（在$|z|\le\frac{R}{3}$内），只需证明$|f(0)|\le2^{-n}M$即可！

☆ 令$\boxed{g(z)=\frac{f(z)}{\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{z}{z_i}\right)}}$，则$g$在$|z|\le R$内解析，且$g(0)=f(0)$，则

只需证明$|g(0)|\le2^{-n}M$. 在$|z|=R$上，$\tilde{z}_0\in$，$|g(\tilde{z}_0)|=\frac{|f(\tilde{z}_0)|}{\prod_{i=1}^{n}\left|1-\frac{\tilde{z}_0}{z_i}\right|}\le\frac{M}{\prod_{i=1}^{n}(3-1)}=2^{-n}M$

由极大值$\Rightarrow|g(0)|\le2^{-n}M$！ $\square$

7. [第十二届CMC(决赛)] 设 $\{f_n(z)\}$ 在区域 G 上解析，且在 G 中内闭一致收敛于 $f(z)$.

证明：(1). 若 $f(z)$ 不恒为零，l 为 G 内可求长简单闭曲线（l 不经过 f 零点），其内部属于 G，则

$\exists N\in\mathbb{Z}_+$ 使 $\forall n\geq N$ 时，在 l 内部 $f_n(z)$ 与 $f(z)$ 有相同个数零点.

(2). 若 $\{f_n(z)\}$ 在 G 内单叶，且 $f(z)$ 不为常数，则 $f(z)$ 在 G 内单叶解析.

(证明). 熟知 f 在 G 内解析.

(1) f 在 l 上非零，且 l 紧 $\Rightarrow$ 设 $m=\min\limits_{z\in l}|f(z)|>0$，则

$\exists N\in\mathbb{Z}_+$，当 $n\geq N$ 时，在 l 上有 $|f(z)-f_n(z)|<m$，则当 $n\geq N$ 时有

在 l 上 $\Rightarrow |f_n(z)-f(z)|<|f(z)|$，由 Rouché $\Rightarrow$ ✓. □

(2) 若 f 在 G 内不单叶，则 $\exists z_1\neq z_2$ 使 $f(z_1)=f(z_2)$.

令 $F_n(z)=f_n(z)-f(z_1)$，$F_n(z)\xrightarrow[\text{一致}]{\text{内闭}}F(z)=f(z)-f(z_1)$. 由 $\mathbb{C}$ 为 T_2 性，

作 $C_1:|z-z_1|=r_1$，$C_2:|z-z_2|=r_2$，$C_1\cap C_2=\emptyset$，由(1)知 $\exists N$，$\forall n\geq N$ 时， ☆

F_n 在 C_1 与 C_2 内部与 F 零点个数相同，则 f_n 不单叶，矛盾！ □

8. [2021 Yau赛个人] 设 $P(z)$ 为复系数多项式 $(\neq 0)$，则 $e^z=P(z)$ 有 $\mathbb{C}$ 上无穷多解.

(证明) 证明推广结论：$\forall\lambda\neq 0$，$P(z)\not\equiv 0$，$e^{\lambda z}-P(z)=0$ 有无穷个解.

而 $e^{\lambda z}=P(z)\Leftrightarrow P(z)e^{-\lambda z}=1$，则 $z=\infty$ 为 $P(z)e^{-\lambda z}$ 的本性奇点（显然），

而 $e^{-\lambda z}\neq 0$，则 $P(z)e^{-\lambda z}$ 只有有限个零点，故由 Picard 大定理知

$P(z)e^{-\lambda z}$ 可无穷次取到除 0 外任何值，当然包括 1. ✓ □

9. 设 g 为整函数，设 $u=\mathrm{Re}(g)$，且存在 $|z|=r$ 时有 $u(z)\le Cr^s$，其中 r 为正实数，

且可 $r\to+\infty$（数列）. 证明：g 为次数 $\le s$ 的多项式.

（证明）. 幂级数展开为 $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，注意到

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r}\frac{g(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}g(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta,\ n\ge 0.$$

则 $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta=\begin{cases}a_nr^n, & n\ge 0\\ 0, & n<0\end{cases}.$$

对 $n>0$，取共轭得 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{g(re^{i\theta})}e^{-in\theta}d\theta=0$，则

对 $n>0$ 有 $a_nr^n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$，对 $n=0$，有

$2\mathrm{Re}(a_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})d\theta$. 注意到 $\int_0^{2\pi}e^{-in\theta}d\theta=0,(n\neq 0)$.

则对 $n>0$ 有 $a_n=\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}(u(re^{i\theta})-Cr^s)e^{-in\theta}d\theta$，故

$$|a_n|\le\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}(Cr^s-u(re^{i\theta}))d\theta\le 2Cr^{s-n}-2\mathrm{Re}(a_0)r^{-n},$$

则当 $n>s$ 时，令 $r\to+\infty$，有 $a_n=0$，故得证！ □

10. 设 $w_1,\cdots,w_n\in\overline{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|\le 1\}$，证明：在单位圆周上存在点 z 使

z 到 $w_1,\cdots,w_n$ 的距离乘积不小于1.

（证明）令 $g(z)=z\prod_{k=1}^{n}(z-w_k)$，则等比求和知当 $k<n+1$ 时，$\sum_{j=0}^{n}e^{2\pi i\frac{jk}{n+1}}=0$

则 $\sum_{j=0}^{n}g(e^{2\pi i\frac{j}{n+1}})=n+1$，则 $\exists j$ 使 $|g(e^{2\pi i\frac{j}{n+1}})|\ge 1$ ✓. □

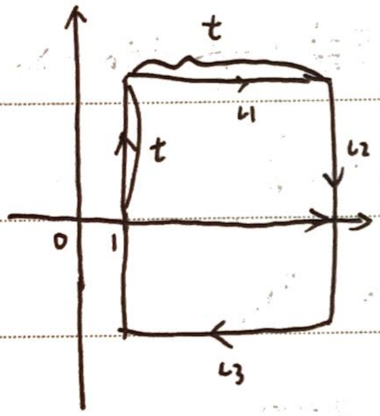
11. 设 $t>0$. L_t 为 $\{1+iy: -t\le y\le t\}$，方向从下到上，固定 $A>0$. 令 $I_t=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_t}\frac{A^z}{z}dz$.

判断极限 $\lim\limits_{t\to+\infty} I_t$ 是否存在.

(解答) ① 若 $A=1$，则 $\frac{1}{2\pi i}\int_{L_t}\frac{1}{z}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{-t}^{t}\frac{i}{1+ix}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{t}\frac{1-ix}{1+x^2}dx$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{t}\frac{1}{1+x^2}dx-\frac{i}{2\pi}\int_{-t}^{t}\frac{x}{1+x^2}dx\to\frac{1}{2}\ (t\to\infty)$.

② 若 $0<A<1$，考虑围道：

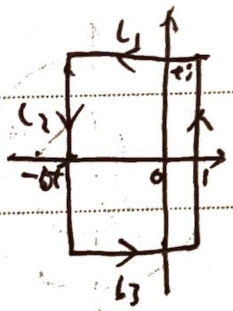


$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1\text{或}L_3}\frac{A^z}{z}dz\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_{1}^{t}\frac{A^x}{t}dt=\frac{1}{2\pi t\ln A}(A^x-1)\to 0\ (t\to\infty)$

$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{A^z}{z}dz\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{t}\frac{A^t}{t}dy=\frac{A^t}{\pi}\to 0\ (t\to\infty)$.

故 $\frac{1}{2\pi i}\int_{L_t}\frac{A^z}{z}dz\to 0.\ (t\to\infty)$

③ 若 $A>1$，考虑围道：



$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1\text{或}L_3}\frac{A^z}{z}dz\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{1}\frac{A^x}{t}dt=\frac{1}{2\pi t\ln A}(A-A^{-t})\to 0\ (t\to\infty)$.

$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{A^z}{z}dz\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{t}\frac{A^{-t}}{t}dy=\frac{A^{-t}}{\pi}\to 0\ (t\to\infty)$

则 $\frac{1}{2\pi i}\int_{L_t}\frac{A^z}{z}dz\longrightarrow\sum\mathrm{Res}\left(\frac{A^z}{z}\right)=\mathrm{Res}_{z=0}\left(\frac{A^z}{z}\right)=1\ (t\to\infty)$. $\square$

12. f 在 $\mathbb{D}$ 内解析，且 $|f(z)|\le\frac{1}{1-|z|}$，证明：$|f^{(n)}(0)|\le(n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<e(n+1)!\ (n=1,2\cdots)$

(证明) 取 $|z|=\rho<1$，则在上面 $|f(z)|\le\frac{1}{1-\rho}$，而 $|f^{(n)}(0)|\le\frac{n!M(\rho)}{\rho^n}\le\frac{n!}{\rho^n(1-\rho)}$

上对 $\forall\rho\in(0,1)$ 成立，而 $\rho^n(1-\rho)=\underbrace{\rho\cdots\rho}_{n\uparrow}(1-\rho)\le\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$

则 $|f^{(n)}(0)|\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)!<e(n+1)!$

如13. 若f在 $|z-z_0|>r_0$ $(0<r_0<r)$ 解析且 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=A$，则有 $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z_0-z|=r} f(z)dz = A$.

(证明) $\forall\varepsilon>0,\ \exists R>r_0$ s.t. $\forall |z|>R$ 有 $|zf(z)-A|<\varepsilon$. 设 $C_{\tilde R}$ 为 $|z|=\tilde R>R$，

则 $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z_0-z|=r} f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\tilde R}} f(z)dz$，则注意到 $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\tilde R}}\frac{1}{z}dz=1$，则

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z_0-z|=r} f(z)dz-A\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\tilde R}}\left(f(z)-\frac{A}{z}\right)dz\right|$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_{\tilde R}}\frac{zf(z)-A}{z}dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{C_{\tilde R}}\frac{|zf(z)-A|}{|z|}|dz| \le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{R}\cdot 2\pi R=\varepsilon.$$ ✓. □

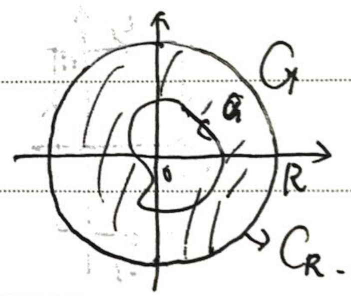
[注：若 

⇒ ~~恒有~~ 有 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{S_R} f(z)dz = i(\theta_2-\theta_1)A$.]

14. f在简单闭曲线C的外部G内及C上解析，且 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\alpha$，证明：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases}-f(z)+\alpha, & z\in G\\ \alpha, & z\text{在C内部时}.\end{cases}$$

(证明) 若z在C内部，$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ 在G解析，考虑如图所示，



C_R 为 $|z|=R$，将C与z包含. 则

由Cauchy积分定理 ⇒ $\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$.

~~若z在C外~~，则 $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ 在 C_R 外解析，且 $\lim\limits_{\zeta\to\infty}\frac{\zeta f(\zeta)}{\zeta-z}=\alpha$

则由13 ⇒ $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\alpha$，则 $\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\alpha$.

若z在C外，则 $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=-f(z)+\alpha.$$ ✓ □

15. 当 $0<|z|<1$ 时，$\frac{1}{4}|z| < |e^z-1| < \frac{7}{4}|z|$.

(证明) 由 $|e^z-1| = |z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots| = |z|\,|1+\frac{z}{2!}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{n!}+\cdots|$

$> |z|\,|1-(\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots)| = |z|\,|1-e+2| = |z|(3-e)$.

反之，$|e^z-1| \le |z|\,|1+\frac{|z|}{2!}+\cdots+\frac{|z|^{n-1}}{n!}+\cdots| < |z|\,|1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots|$

$= |z|(e-1)$. 故 $(3-e)|z| < |e^z-1| < (e-1)|z|$. 加强了结论！ □

16. 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\ (a_0\neq 0)$ 收敛半径为 $R>0$. 且 $M=\max_{|z|\le\rho}|f(z)|\ (\rho<R)$.

证明：在圆 $|z|<\frac{|a_0|}{|a_0|+M}\rho$ 内 $f(z)$ 无零点.

(证明) $|a_n|\le\frac{M}{\rho^n}$，则 $|z|<\rho$ 时，有

$|f(z_0)-a_0| \le \sum_{n=1}^{\infty}|a_n||z|^n \le M\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n = \frac{M|z|}{\rho-|z|}$.

故在 $|z|<\frac{|a_0|}{|a_0|+M}\rho$ 内，$|f(z_0)-a_0| < \dfrac{M\frac{|a_0|}{|a_0|+M}\rho}{\rho-\frac{|a_0|}{|a_0|+M}\rho} = |a_0|$

而 $|a_0|-|f(z_0)| \le |f(z)-a_0| < |a_0| \Rightarrow |f(z)|>0$ ✓. □

17. (Jordan) g 沿 $\Gamma_R: z=Re^{i\theta}\ (0\le\theta\le\pi$, R 充分大$)$ 连续，且 $\lim_{R\to+\infty} g(z)=0$ 在 Γ_R 上一致成立. 则 $\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R} g(z)e^{imz}dz=0\ (m>0)$.

(证明) $\forall\varepsilon>0$，$\exists R_0>0$，$\forall R>R_0$，$|g(z)|<\varepsilon$，$\forall z\in\Gamma_R$.

则 $\left|\int_{\Gamma_R} g(z)e^{imz}dz\right| = \left|\int_0^{\pi} g(Re^{i\theta})\,e^{imRe^{i\theta}}Re^{i\theta}d\theta\right|$

$\le R\varepsilon\int_0^{\pi} e^{-mR\sin\theta}d\theta$.

由 $\frac{2\theta}{\pi}\le\sin\theta\le\theta\ (0\le\theta\le\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \left|\int_{\Gamma_R}\cdots\right| \le 2R\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\sin\theta}d\theta$

$\le 2R\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2mR\theta}{\pi}}d\theta = \frac{\pi\varepsilon}{m}(1-e^{-mR}) < \frac{\pi\varepsilon}{m}$. □

18. ~~若 D=D+ 解析~~，C为逐段光滑闭曲线，int C = G. 函数 $f(z)$ 在 G内除极点 $a_1, \cdots, a_n (\neq 0)$ 外解析，在 $\bar{G} = G \cup C$ 上除这些点外连续. 取 $z \neq 0$，且 $z \in G$，$z \neq a_k$，设 $G_k(z)$ 为 f 在 a_k 的 Laurent 展开的主要部分. 证明：$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) - \sum_{k=1}^{n} G_k(z)$.

(证明) 知 $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \operatorname{Res}_{\zeta = z}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{\zeta = a_k}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right) = f(z) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{\zeta = a_k}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right)$.

设 a_k 为 $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ 的 m_k 阶极点. 在 $0 < |\zeta - a_k| < \rho$ 上对 f 进行 Laurent 展开

得 $f(\zeta) = \frac{C_{-m_k}}{(\zeta - a_k)^{m_k}} + \frac{C_{-m_k+1}}{(\zeta - a_k)^{m_k - 1}} + \cdots + \frac{C_{-1}}{\zeta - a_k} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (\zeta - a_k)^n = G_k(\zeta) + \varphi_k(\zeta)$.

再将 $\frac{1}{\zeta - z}$ 在 $|\zeta - a_k| < |z - a_k|$ 展为 $\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - a_k}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta - a_k}{z - a_k}\right)^n$

则在 $0 < |\zeta - a_k| < \min(\rho, |z - a_k|)$ 有

$$F(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} (G_k(\zeta) + \varphi_k(\zeta))\left(-\frac{1}{z - a_k}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta - a_k}{z - a_k}\right)^n\right).$$

展开后算 $\frac{1}{\zeta - a_k}$ 系数 知 $\operatorname{Res}_{\zeta = a_k} F(\zeta) = -G_k(z)$ ✓. □

19. 若单叶解析 $w = f(z)$ 将可求面积区域 D 变为 G，证明：$A(G) = \iint_D |f'(z)|^2 dxdy$.

(证明). 知 $A(G) = \iint_G du dv = -\frac{1}{2i}\iint_G dw \wedge d\bar{w} = -\frac{1}{2i}\iint_D \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}$

$$= \iint_D \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 dxdy = \iint_D |f'(z)|^2 dxdy. \quad \square$$

20. 若 f 在区域 D 内单叶解析，则 D内 $f'(z) \neq 0$.

(证明) 若 $z_0 \in D \Rightarrow f'(z_0) = 0$，则 z_0 为 $f(z) - f(z_0)$ 的 n 阶零点 $(n \geq 2)$. $\exists \delta > 0$ 使

在 $|z - z_0| = \delta := C$ 上 $f(z) - f(z_0) \neq 0$，且 $f(z) - f(z_0)$ 与 $f'(z_0)$ 无异于 z_0 零点.

取 $m = \min_C |f(z) - f(z_0)|$，则当 $0 < |a| < m$ 时 $f(z) - f(z_0) - a$ 在 C 内恰有 n 个零点

且重数为 1，这与 f 单叶矛盾！ □

21. 设 $w=f(z)$ 在 z_0 处解析，且 $f'(z_0)\neq 0$，则 f 在 z_0 某邻域内单叶解析.

(证明) 不妨设 $z_0=0$. 不失一般性 令 $f(0)=0$，则 $f'(0)\neq 0$，0 为 f 一阶零点.

$\exists r>0$，f 在 $|z|\leq r$ 解析，且在 $C: |z|=r$ 上 $f(z)\neq 0$，$|f(z)|\geq m>0$.

$f(0)=0$，$\exists \delta>0$，当 $|z|<\delta<r$ 时，$|f(z)|<m$. 断言 f 在 $|z|<\delta$ 单叶. 否则

设 $|z|<\delta$ 内有 $z_1\neq z_2$ 和，$f(z_1)=f(z_2)=w_0\neq 0$，$|w_0|<m$，则

在 $C: |z|=r$ 上，$|f(z)|\geq m>|-w_0| \Rightarrow N(f-w_0, C)=N(f, C)=1$ 矛盾! □

22. 设 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析且不为常值，则 $G=f(D)$ 为区域.

(证明) 连通性不言自明. 只需证 G 为开集. $\forall w_0\in G$，下证 w_0 为 G 内点. 设 $f(z_0)=w_0$.

$\exists$ z_0 为心的圆周 C，且 C 与 C 内部在 D 内，且 $f(z)-w_0$ 在 C 与 C 内部只有 z_0 一个零点.

设 $\delta=\min\limits_{C}|f(z)-w_0|$，$\delta>0$. 则对以 w_0 为心，δ 为半径内的点 $\tilde{w}$，有

$|f(z)-w_0|\geq\delta>|\tilde{w}-w_0|$，由 Rouché $\Rightarrow$ $f(z)-\tilde{w}$ 与 $f(z)-w_0$ 零点

个数相同，故 $f(z)=\tilde{w}$ 有解 $\Rightarrow$ w_0 为内点. □

23. 设 $F(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}d(n)z^n$ $(|z|<1)$，其中 $d(n)$ 为 n 的因子数，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}d(n)z^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^n}$，

进而存在对 $z=r$ $(0<r<1)$ 有 $|F(r)|\geq C\frac{1}{1-r}\log\left(\frac{1}{1-r}\right)$.

(证明) 有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^n}=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^{(m+1)n}$. 注意到方程 $k=(m+1)n$ 有 $d(k)$ 个解，因为 $m+1$ 表

示 k 的因子，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}d(n)z^n$. 而且 $|F(r)|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{1-r^n}\geq\int_1^{\infty}\frac{r^n}{1-r^n}dn$

$=-\frac{1}{\log r}\log\left(\frac{1}{1-r}\right)$. 令 $r\to 1$，有 $\log r=r-1+O((r-1)^2)$，故 $\exists C$ 使

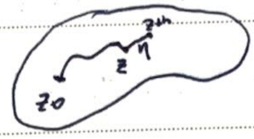
$|F(r)|\geq C\frac{1}{1-r}\log\left(\frac{1}{1-r}\right)$. □

24. 若 f 为~~处处非零~~在单连通区域 Ω 处处非零且解析，则存在 Ω 上解析函数 $g(z)$ 使 $f(z)=e^{g(z)}$.

(证明) 固定 $z_0\in\Omega$，定义 $g(z)=\int_{\gamma_z}\frac{f'(w)}{f(w)}dw+c_0$，其中 γ_z 为任一 z_0 到 z 的曲线，且 $e^{c_0}=f(z_0)$.

下面断言 $g'(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$. 由 $g(z+h)-g(z)=\int_{\gamma_{z+h}}\frac{f'(w)}{f(w)}dw-\int_{\gamma_z}\frac{f'(w)}{f(w)}dw$. 由单连通性

不难得知 $g(z+h)-g(z)=\int_\eta\frac{f'(w)}{f(w)}dw$，其中 η 为 z 到 $z+h$ 直线. 记 $\psi(w)=\frac{f'(w)}{f(w)}$，则



令 $\psi(w)=\psi(z)+\varphi(w)$，当 $w\to z$，$\varphi(w)\to 0$. 则有

$$g(z+h)-g(z)=\psi(z)\int_\eta dw+\int_\eta\varphi(w)dw=h\psi(z)+\int_\eta\varphi(w)dw$$，且

知 $\left|\int_\eta\varphi(w)dw\right|\le\sup_{w\in\eta}|\varphi(w)||h|\to 0\ (h\to 0)$，则 $\lim_{h\to 0}\frac{g(z+h)-g(z)}{h}=\psi(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$，断言成立!

计算知 $(f(z)e^{-g(z)})'=0$，故 $f(z)e^{-g(z)}\equiv C$，代入 $z_0\Rightarrow C=1\Rightarrow f(z)=e^{g(z)}$ ✓. □

25. 设 $U\subseteq\mathbb{C}^2$ 为开集，且 $\|f\|_{L^2(U)}=\left(\int_U|f(z)|^2dxdy\right)^{\frac12}$，且 $\|f\|_{L^\infty(U)}=\sup_{z\in U}|f(z)|$.

(∃C不依赖f)

(a) 若 f 在圆盘 $D_r(z_0)$ 的邻域内解析，证明：$\forall 0<s<r$，$\exists C>0$ 使 $\|f\|_{L^\infty(D_s(z_0))}\le C\|f\|_{L^2(D_r(z_0))}$；

(b). 若 $\{f_n\}$ 为一族解析函数，且为 $\|\cdot\|_{L^2(U)}$ 的Cauchy列，证明：$\{f_n\}$ 在每个 U 的紧子集上一致收敛于某解析函数 f.

(证明). (a) 取 $d>0$，且 g 在 $U\supseteq\overline{D_d(z)}$ 上解析，由平均值 $\Rightarrow g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(z+\rho e^{i\theta})d\theta\ (\forall 0<\rho<d)$.

则 $|g(z)|\frac{d^2}{2}\le\frac{1}{2\pi}\int_0^d\int_0^{2\pi}|g(z+\rho e^{i\theta})|\rho d\theta d\rho=\frac{1}{2\pi}\iint_{|w-z|<d}|g(w)|dxdy$. 设 $g=f^2$，则有

$|f(z)|\le\frac{1}{\sqrt{\pi}d}\|f\|_{L^2(D_d(z))}$. 取 $d=r-s\Rightarrow|f(z)|\le\frac{1}{\sqrt{\pi}(r-s)}\|f\|_{L^2(D_{r-s}(z))}\le\frac{1}{\sqrt{\pi}(r-s)}\|f\|_{L^2(D_r(z_0))}$.

任取 $z\in D_s(z_0)\Rightarrow\|f\|_{L^\infty(D_s(z_0))}\le\frac{1}{\sqrt{\pi}(r-s)}\|f\|_{L^2(D_r(z_0))}$. □

(b) 由(a) $\Rightarrow$ 若 $\{f_n\}$ 是Cauchy列 resp. $\|f\|_{L^2}\Rightarrow$ 也 resp. $\|f\|_{L^\infty}$，则Cauchy ✓. □

26. (Area Theorem) 设 $h(z)=\frac{1}{z}+c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n+\cdots$ 在 $0<|z|<1$ 上单叶解析，则 $\sum_{n=1}^{\infty}n|c_n|^2\le 1$.

(证明) 设 $0<\rho<1$. h 单，则由 Jordan 曲线定理 $\Rightarrow$ $|z|=\rho$ 在 h 作用下分割 $\mathbb{C}$ 为 2 部分，且 $h(D(0,\rho)\setminus\{0\})$ 为面积无穷部分，则令 G_ρ 为其补，记 $\gamma_\rho=\partial G_\rho$ (正向)，则

$$\mathrm{Area}(G_\rho)=\int_{G_\rho}du\,dv=\frac{1}{2i}\int_{G_\rho}d\bar{w}\wedge dw=\frac{1}{2i}\int_{\gamma_\rho}\bar{w}\,dw=-\frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}\overline{h(\rho e^{it})}\,h'(\rho e^{it})\,i\rho e^{it}\,dt$$

$$=-\frac{\rho}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{e^{it}}{\rho}+\sum_{m=0}^{\infty}\overline{c_m}\rho^m e^{-imt}\right)\left(-\frac{e^{-2it}}{\rho^2}+\sum_{n=1}^{\infty}nc_n\rho^{n-1}e^{i(n-1)t}\right)e^{it}\,dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(-\rho^{-2}+\rho^{-1}e^{it}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{c_m}\rho^m e^{-imt}-\rho^{-1}e^{-it}\sum_{m=0}^{\infty}\overline{c_m}\rho^m e^{-imt}+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n\overline{c_m}c_n\rho^{m+n}e^{-i(m-n)t}\right)dt$$

$$=-\pi\left(\sum_{k=1}^{\infty}k|c_k|^2\rho^{2k}-\rho^{-2}\right)\ge 0.$$ 则 $\sum_{k=1}^{\infty}k|c_k|^2\rho^{2k}\le\rho^{-2}$，令 $\rho\to 1\Rightarrow$ ✓. □

27. (Jensen 公式) 设 Ω 为包含 $\overline{D_R}$ 的开集，且 f 在 Ω 上解析，$f(0)\ne 0$. 且 f 在 C_R 上处处不为 0. 若 $z_1,\cdots,z_N$ 为 f 在 D_R 内的零点(按重数排列)，则：

$$\log|f(0)|=\sum_{k=1}^{N}\log\left(\frac{|z_k|}{R}\right)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\theta})|\,d\theta.$$

(证明) 首先注意到 若 f_1,f_2 满足条件，则 f_1f_2 也是如此! 则令 $g(z)=\frac{f(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_N)}$，则 g 在 Ω 上解析，且在 $\overline{D_R}$ 内处处不为零. 只需要对 g 与 $z-z_j$ 证明即可!

① 对 g，只需证明: $\log|g(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(Re^{i\theta})|\,d\theta$. 由 24，令 $g=e^h$，则有 $|g(z)|=|e^{h(z)}|=e^{\mathrm{Re}\,h(z)}$，故 $\log|g(z)|=\mathrm{Re}(h(z))$，由平均值定理知结论成立!

② 对 $z-w$ ($w\in D_R$)，只需证明: $\log|w|=\log\left|\frac{w}{R}\right|+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|Re^{i\theta}-w|\,d\theta$

$\Longleftrightarrow$ 证明 $\int_0^{2\pi}\log\left|e^{i\theta}-\frac{w}{R}\right|d\theta=0$. 令 $a=\frac{w}{R}$, $|a|<1$，只需证明

$$\int_0^{2\pi}\log|1-ae^{i\theta}|\,d\theta=0,\ |a|<1.$$

知 $1-az$ 在 D_R 内处处不为零，$\Rightarrow$ 由 24，$1-az=e^{G(z)}$，$|1-az|=e^{\mathrm{Re}(G(z))}$

即 $\log|1-az|=\mathrm{Re}(G(z))$，平均值 $\Rightarrow\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|1-ae^{i\theta}|\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}(G(z))\,d\theta$

$=\mathrm{Re}(G(0))=0.$ ✓ □

28. $f(z)$在区域D内解析，C为D内连a,b的直线，证：∃数λ，$|\lambda|\le 1$ 与 $\xi\in C$ 使

$$f(b)-f(a)=\lambda(b-a)f'(\xi).$$

(证明) 知 $|f(b)-f(a)|=\left|\int_a^b f'(z)dz\right|\le\int_a^b|f'(z)||dz|$. 由C紧 ⇒ ∃$\xi\in C$

使 $|f'(\xi)|$ 为 $|f'(z)|$ 在C上最大值，则 $\int_a^b|f'(z)||dz|\le|f'(\xi)||b-a|$

若 $\forall\eta\in C$，$f'(\eta)\equiv 0$ ⇒ 两边全为零，成立！

否则，$f'(\xi)\neq 0$，令 $\lambda=\dfrac{f(b)-f(a)}{f'(\xi)(b-a)}$，则命题成立！且 $|\lambda|\le 1$. □

29. 设 $f(z)$ 不恒为常数，且在 $0<|z-a|<R$ 内解析，若a为$f(z)$零点的极限点，则a为f本性奇点.

(证明) 对f在 $0<|z-a|<R$ 内 Laurent 展开得

$$f(z)=\cdots+\frac{C_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{C_{-1}}{z-a}+C_0+C_1(z-a)+\cdots+C_n(z-a)^n+\cdots$$

若a为f可去奇点 ⇔ f可在 $|z-a|<R$ 解析，但由极限点 ⇒ $f\equiv 0$，矛盾！

若a为f极点 ⇒ $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$，故∃δ使当 $|z-a|<\delta$ 时 $|f(z)|>M$，不可能a为$f(z)$零点的极限点！故a为f本性奇点！ □

30. C为一条周线，设a_k为f在C内阶数为n_k的不同零点，设b_j为f在C内阶数为m_j的不同极点，且 $\varphi(z)$为C内解析函数，则 $\frac{1}{2\pi i}\int_C\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum\limits_{k=1}^{p}n_k\varphi(a_k)-\sum\limits_{j=1}^{q}m_j\varphi(b_j)$.

(证明) 考虑a_k处，$f(z)=C_{n_k}^{(k)}(z-a_k)^{n_k}+C_{n_k+1}^{(k)}(z-a_k)^{n_k+1}+\cdots$，$C_{n_k}^{(k)}\neq 0$，

则 $f'(z)=n_kC_{n_k}^{(k)}(z-a_k)^{n_k-1}+\cdots$，且 $\varphi(z)=\varphi(a_k)+\varphi'(a_k)(z-a_k)+\cdots$

则 $\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}=\dfrac{n_k}{z-a_k}\left(\varphi(a_k)+\cdots\right)$，则 $\varphi\frac{f'}{f}$ 在a_k处留数为 $n_k\varphi(a_k)$.

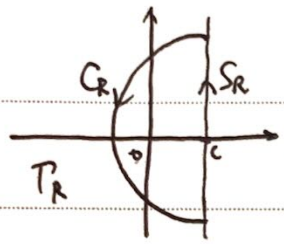
对b_j同理 ⇒ 由留数定理知结论成立！ □

31. 若 $c>0$，设 ℓ 为线 $\mathrm{Re}(s)=c$，从下到上，则证明：

当 $a>0$ 时，有 $\frac{1}{2\pi i}\int_\ell \frac{a^s}{s(s+1)}ds=\begin{cases}0, & 0<a\le 1\\ 1-\frac{1}{a}, & a\ge 1\end{cases}$

(证明) 当 $a\ge 1$ 时，令 $a=e^\beta$，$\beta\ge 0$，则 $f(s)=\frac{e^{s\beta}}{s(s+1)}$，则 $\mathrm{Res}_{s=0}f=1$，$\mathrm{Res}_{s=-1}f=-\frac{1}{a}$.

考虑围道：



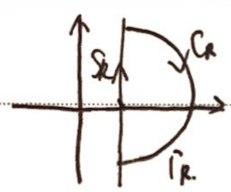
由留数定理知 $\frac{1}{2\pi i}\int_{T_R}f(s)ds=1-\frac{1}{a}=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{S_R}f(s)ds+\int_{C_R}f(s)ds\right)$.

由于设 $s=\sigma+it\in C_R$，则 $|s(s+1)|\ge\frac{1}{2}R^2$，且由于 $\sigma\le c$，则

有 $|e^{\beta s}|\le e^{\beta c}$，则 $\left|\int_{C_R}f(s)ds\right|\le\frac{C}{R^2}2\pi R\to 0\ (R\to\infty)$.

故 $\frac{1}{2\pi i}\int_\ell f(s)ds=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{S(R)}f(s)ds=1-a^{-1}$.

当 $0<a\le 1$ 时，考虑围道：由 Cauchy 积分定理 $\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}f(s)ds=0$.



而 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}f(s)ds=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{S_R}f(s)ds+\int_{C_R}f(s)ds\right)=0$.

同理可知 $\left|\int_{C_R}f(s)ds\right|\to 0\ (R\to\infty)$，则有

$\frac{1}{2\pi i}\int_\ell f(s)ds=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{S_R}f(s)ds=0$. $\square$

32. 设 $z,w\in\mathbb{D}$ 的伪双曲度量 $\rho(z,w)=\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|$.

(1) 证明：若 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 解析，则 $\rho(f(z),f(w))\le\rho(z,w)$；若 $f\in\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$，则 $\rho(f(z),f(w))=\rho(z,w)$；

(2) 证明：$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\le\frac{1}{1-|z|^2}\ (\forall z\in\mathbb{D})$，[Schwarz-Pick Lemma]

(证明) (1) 设 $\varphi_\alpha=\frac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z}:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$，考虑 $\varphi_{f(w)}\circ f\circ\varphi_w^{-1}$，则 $0\mapsto 0$，$\mathbb{D}\to\mathbb{D}$.

由 Schwartz $\Rightarrow |\varphi_{f(w)}\circ f\circ\varphi_w^{-1}(z)|\le|z|$，即 $|\varphi_{f(w)}\circ f(z)|\le|\varphi_w(z)|$.

即为 $\rho(f(z),f(w))\le\rho(z,w)$. Then more thing is trivial. $\square$

(2) 由 (1) $\Rightarrow \left|\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(w)}f(z)}\right|\le\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|$，即 $\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right|\le\left|\frac{1-\overline{f(w)}f(z)}{1-\bar{w}z}\right|$.

令 $w\to z$ 得 $|f'(z)|\le\frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$，即 $\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\le\frac{1}{1-|z|^2}$. $\square$

1、设 $\Omega=\{0<|z|<1\}$，且 f 在 Ω 上全纯，且 $\iint_\Omega |f(z)|^2 dxdy<+\infty$，则 $z=0$ 为 f 可去奇点.

(证明) 否则，用 Laurent 展开，这知 $\iint_\Omega |\frac{1}{z^k}|^2 dxdy=+\infty$，$k\geq 1$.

则 ~~$\iint_\Omega |f(z)|^2$~~ 令 $f=p(z)+\frac{C_{-1}}{z}+\cdots+\frac{C_{-k}}{z^k}$，则

$$\iint_\Omega |f(z)|^2 dxdy=\iint_\Omega \left|p(z)+\frac{C_{-1}}{z}+\cdots+\frac{C_{-k}}{z^k}\right|^2 dxdy$$

$$\geq \iint_\Omega \left|\left|\frac{C_{-k}}{z^k}\right|-\left|p(z)+\cdots+\frac{C_{-k+1}}{z^{k-1}}\right|\right|^2 dxdy=+\infty$$，矛盾 □

2、Ω 为区域，$g, f: \Omega\to\mathbb{C}$ 全纯，且 $\forall z\in\Omega \Rightarrow g(z)=|f(z)|^2+f(z)$.

证明：f, g 为常值函数.

(证明) 由 $g(z)-f(z)=|f(z)|^2\in\mathbb{R} \Rightarrow g(z)-f(z)\equiv C \Rightarrow |f(z)|\equiv\sqrt{C}$

$\Rightarrow f\equiv C'$，$g\equiv C+C'$ ✓ □

3、D为 $\mathbb{C}$ 内区域，$f, g: \Omega\to\mathbb{C}$ 全纯，且 $\forall z\in D$ 有 $|f(z)|^2+|g(z)|^2$ 为常数，

证明：f, g 均为常值函数

(证明) 注意到 $\Delta|f(z)|^2=4|f'(z)|^2$，则 $0=\Delta(|f(z)|^2+|g(z)|^2)$

$=4(|f'(z)|^2+|g'(z)|^2)$，则 $g'(z)=0$，$f'(z)=0 \Rightarrow f, g$ 常值 □