复变定理.

1. [Cauchy-Riemann]

$f=u+iv$ 在区域D有定义，则

f在D内一点 $z=x+iy$ 可微

$\Longleftrightarrow$ (i) u, v 在 (x,y) 可微

& (ii) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$ $\left[\Rightarrow f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial z} = \cdots\right]$

2. [Cauchy 积分定理].

f在 单连通 区域D上解析，

C为D内闭线，则 $\int_C f(z)dz = 0$.

Coro. C为D内闭曲线，则 $\int_C f = 0$.

3. [原函数] f在单连通区域D内连续

且 $\int_C f=0$, $\forall$ C为D内闭线

则 $F=\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ 在D内解析，

且 $F'(z)=f(z)$.

4. [原函数2] f 在单连通D连续，

且 $\int_C f=0$, $\forall$ C为D内闭线

若 Φ 为f在D内(任意)原函数

$\Rightarrow \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi = \Phi(z) - \Phi(z_0)$.

5. 区域D边界为复闭线C，[Cauchy积分公式]

f在D内解析，在 $\bar{D}=D\cup C$ 连续

$\Rightarrow f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i}\int_C \dfrac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi$

6. [Morera定理] f在单连通D内连续，

且 $\forall$ 闭线 $C\subseteq D$ 有 $\int_C f=0$

$\Rightarrow$ f在D内解析.

7. [全纯函数列] $\{f_n\}$ 全纯，

且 $f_n \rightrightarrows f$ 在 $\forall K\subset\Omega$ 紧一致 $\Rightarrow$ f 全纯 in Ω.

8. [Liouville定理] 有界整函数f为常数

9. [非齐次积分公式] $\gamma_0, \cdots, \gamma_n \Rightarrow$ 可求长简单曲线

γ_0. $\gamma = \bigcup \gamma_i$

若 $f\in C^1(\bar{D})$, $\forall z\in D$

$\Rightarrow f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \dfrac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi + \dfrac{1}{2\pi i}\int_D \dfrac{\partial f(\xi)}{\partial\bar{\xi}} \dfrac{1}{\xi-z}\, d\bar{\xi}\wedge d\xi$.

10. [Weierstrass定理] 若 f_n 在D解析.

(1) $\sum_n f_n$ 在D内内闭 $\rightrightarrows f(z)$

则 (i) f在D解析；

(ii) $f^{(p)}(z) = \sum_n f_n^{(p)}(z)$.

11. [Taylor定理] f在D解析

若 $K: |z-a|<R$ 在D内，则 f在K内

有 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$,

其中 $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\substack{|\xi-a|=\rho \\ 0<\rho<R}} \dfrac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

12. [零点孤立性] $|z-a|<R$ 内解析 $f\not\equiv 0$

$f(a)=0 \Rightarrow \exists$ a邻域 $\Rightarrow$ f在其中除a无零点

13. [唯一性] f_1, f_2 在D内解析.

D内有 $z_n \to a\in D$ 使 $f_1|_{\{z_n\}} = f_2|_{\{z_n\}}$

$\Rightarrow f_1 \equiv f_2$ in D.

14. [极大模原理] $f\in H(D)$

则 $|f(z)|$ 无法在D内取到最大值，否则 $f\equiv c$.

15. [Laurent 定理] 在 $H: r<|z-a|<R$

内解析的 f 可以展为:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

其中 $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{|\zeta-a|=\rho\\ r<\rho<R}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$，且唯一.

16. [Picard 小定理] f 整函数.

若 f 取不到两个值 $\Rightarrow$ f 为常数.

17. [Schwartz 引理] f 在 $D=\{|z|<1\}$ $f: D\to D$

解析，且 $f(0)=0$，$|f(z)|<1$.

则在D内有 $\begin{cases}|f(z)|\le|z| & \text{——①}\\ |f'(0)|\le 1 & \text{——②}\end{cases}$

若②为等号，或 $\exists z_0\neq 0$ ①"="成立.

$\Rightarrow f(z)=e^{i\alpha}z$，$|z|<1$，$\alpha\in\mathbb{R}$.

18. [Picard 大定理] f 在本性奇点 c 的 $\forall c$ 邻域内，f 可以取到除了一个可能的例外值之外的任何复数 无穷多次!

19. [Residue 定理] f 在复周线 C 所围的D内除 $a_1,\dots,a_n$ 解析，在 $\bar{D}=D+C$ 除 $a_1,\dots,a_n$ 连续

$$\Rightarrow \int_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z).$$

$\left(\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz=c_{-1}\right)$.

20. [辐角原理] C为周线，f 在C内亚纯，在C上全纯且不为零，

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz=N(f,C)-P(f,C)$$

$$=\frac{\Delta_C \arg f(z)}{2\pi}.$$

21. [Rouché 定理] C为周线.

f 与 φ 在C内部全纯，在C上连续.

且 $\forall z\in C$，$|f(z)|>|\varphi(z)|$.

则 $N(f+\varphi, C)=N(f, C)$.

22. [Schwartz 对称原理]

D关于实轴对称，若 f 满足

$\begin{cases} f\text{在 } D^+=D\cap\{\mathrm{Im}>0\} \text{ 全纯}\\ f\text{在 } D\cap\{\mathrm{Im}\ge 0\} \text{ 连续}\\ f(D\cap\mathbb{R})\subseteq\mathbb{R}.\end{cases}$

则 $F(z)=\begin{cases} f(z), & z\in D\cap\{\mathrm{Im}\ge 0\}\\ \overline{f(\bar z)}, & z\in D\cap\{\mathrm{Im}<0\}\end{cases}$

为 f 在D上全纯开拓!

23. [Montel 定理] $\mathcal{F}$ 为D上全纯函数族，则 $\mathcal{F}$ 为正规族

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ 在D上内闭一致有界.

24. [Riemann 映照定理] G在 $\mathbb{C}$ 的单连通且 $G\neq\mathbb{C}$. 则 $\forall a\in G$,

$\exists!\, f: G\to\mathbb{C}$ 使得

$\begin{cases} ① f\text{在G上单叶全纯}\\ ② f(a)=0,\ f'(a)>0.\\ ③ f(G)=B(0,1).\end{cases}$

25. [开映射定理] f 非const.

$\Rightarrow f$ 为开映射

① Let $B_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$

If $\{a_j\} \subseteq \mathbb{D}(0,1)$ with

$$\sum_j (1-|a_j|) < \infty$$

then $\prod_{j=1}^{\infty} \frac{-\bar{a}_j}{|a_j|} B_{a_j}(z)$

converges uniformly on compact subset of $\mathbb{D}(0,1)$

$\Rightarrow$ holo on $\mathbb{D}(0,1)$.

[The Blaschke Product]

② When $f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{1-z}\right)$,

then f is holo on $\mathbb{D}(0,1)$

with $f(1-\frac{1}{n}) = 0$

for all $n \in \mathbb{N}_+$. ✓

③ [Jensen's Formula].

$\overline{\mathbb{D}_R} \subseteq \Omega$, f 在 Ω 上全纯

且 $f(0) \neq 0$, $(\forall C_R, f \neq 0)$.

设 $z_1, \dots, z_N$ 为 f 带重数的根,

则 $\log|f(0)|$

$$= \sum_{k=1}^{N} \log\left(\frac{|z_k|}{R}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})| \, d\theta$$

④ g 整函数, $u = \mathrm{Re}(g)$

设 $u(z) \leq C \cdot |z|^s$

则 g 为 $\deg \leq s$ 的多项式

[$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \begin{cases} a_n r^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow a_n r^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$
$(n > 0)$

$n=0$: $2\mathrm{Re}(a_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta$

$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} \left(u(re^{i\theta}) - Cr^s\right) e^{-in\theta} d\theta$
$(n > 0)$.

$\Rightarrow |a_n| \leq \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} \left(Cr^s - u(re^{i\theta})\right) d\theta$

$\leq 2Cr^{s-n} - 2\mathrm{Re}(a_0) r^{-n}$.

$r \to \infty \Rightarrow a_n = 0$, $\forall n > s$. ✓ . □]

⑤ . 若 $\exists M \in \mathbb{N}, M > 0$

s.t. $|z|$ 充分大 $\Rightarrow |f(z)| \leq M|z|^m$

则 f 为多项式.

[Pf. $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta - z| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$

$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_{|\zeta - z| = R} \frac{|f(\zeta)|}{R^{n+1}} |d\zeta|$

$\leq \frac{n!}{2\pi}\int_{|\zeta - z| = R} \frac{M|\zeta|^m}{R^{n+1}} |d\zeta|$.

$= \frac{Mn!}{2\pi R^{n+1}}\int_{|\zeta - z| = R} |\zeta|^m |d\zeta|$

$\leq \frac{Mn!}{2\pi R^{n+1}}\int_{|\zeta - z| = R} (|z| + R)^m |d\zeta|$

$= \frac{Mn!}{R^n}(|z| + R)^m$.

$n > m$ 时, $R \to \infty \Rightarrow f^{(n)}(z) \to 0$.

$\Rightarrow \forall n > m$, $f^{(n)}(z) = 0$ ✓ . □]

⑥ 若 $\exists M$ s.t. $|f(z)| \geq M|z|^n$ 对足够大的 $|z|$ 成立，则 f 为多项式.

[Pf. 只需证明 f 在 ∞ 处为极点.

否则，f 在 ∞ 上为本性奇点

则 $g(z)=f(\frac{1}{z})$ 也是如此，在 0 本性

~~由Picard大定理~~

考虑 $A=\{z \mid 0<|z|<\frac{1}{R}\}$,

由Picard大定理，$g(A)$ 取除一点外所有复数，但 $|g(z)| \geq \frac{M}{|z|^n} \geq MR^n$, $(\forall z \in A)$

这不可能，矛盾!

$\Rightarrow g$ 在 0 为极点 ✓. □ $\perp$

[多项式 $\Leftrightarrow$ ∞ 为极点!]

⑦ 若 $\exists n$ s.t. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\#(f^{-1}(z)) \leq n$,

$\Rightarrow f$ 为 $\deg \leq n$ 多项式.

[Pf. 若 ∞ 为 f 本性奇点.

$\Rightarrow$ Picard大定理，设 $D_k=\{z: |z|>k\}$

$f(D_k)$ 在 $\mathbb{C}$ 稠密,

开映射 $\Rightarrow f(D_k)$ 开

Baire定理 $\Rightarrow \bigcap_k f(D_k)$ 稠密

$\Rightarrow \forall w \in \bigcap_k f(D_k)$ 中

$\Rightarrow f(z)=w$ 有无穷个解，矛盾! $\perp$

[证明]要已知 f 在 ∞ 本性奇 $\Rightarrow$ $\exists w \in \mathbb{C}$, $f^{-1}(w)$ 无限).

⑧ f,g 整，$f \circ g$ 多项式

$\Rightarrow f \& g$ 多项式

[Pf. 通过 Picard 大定理 + 代数基本定理]

⑨. f entire & proper $\Rightarrow$ 多项式

[Pf. f 非 const.

由零点孤立性 & proper

$\Rightarrow \#(f^{-1}(a)) < \infty$, $\forall a \in \mathbb{C}$.

再由⑦. $\perp$