① Vitali set.

$p,q\in[0,1]$，$p\sim q \Leftarrow |p-q|\in\mathbb{Q}$.

Take each class a 代表元

$\Longrightarrow$ set V. 则 V 不可测.

[p.f.] 设 $\mathbb{Q}\cap[-1,1]=\{q_k\}$

设 $V_{q_k}=V+q_k$

$\Rightarrow [0,1]\subseteq \bigcup_k V_{q_k}\subseteq[-1,2]$.

$\Rightarrow 1\le m^*\left(\bigcup_k V_{q_k}\right)\overset{=\sum_k m^*(V_{q_k})}{\le} 3$.

若 $m^*V=0 \Rightarrow \sum_k m^*(V_{q_k})=0$, 矛盾

若 $m^*V>0 \Rightarrow \sum_k m^*(V_{q_k})=\infty$, 矛盾. $\square$

② 平移正可测集. (WLOG 设在 $\mathbb{R}^1$ 上面)

设 E 为正可测集，则原点有开邻域被 $E-E$ 包含！

[证明一]. Lemma. F 紧，U 开，$F\subseteq U$，则 $\exists$ 0 的开邻域 V 使 $V+F\subseteq U$.

p.f. $\forall x\in F$, $\exists \varepsilon_x>0$, s.t. $(x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x)\subseteq U$

设 $V_x=(-\frac{\varepsilon_x}{2},\frac{\varepsilon_x}{2})$. 则

$$F\subseteq\bigcup_{x\in F}(x+V_x)$$

F 紧 $\Rightarrow \exists x_1,\dots,x_n\in F$

$$\Rightarrow F\subseteq\bigcup_{i=1}^n(x_i+V_{x_i})$$

设 $V=\bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$

$$\Rightarrow V+F\subseteq\bigcup_{i=1}^n(V+x_i+V_{x_i})$$

$$\subseteq\bigcup_{i=1}^n(x_i+V_{x_i}+V_{x_i})$$

$$\subseteq\bigcup_{i=1}^n(x_i-\varepsilon_i,x_i+\varepsilon_i)\subseteq U.\quad\square$$

Back to proof. $mE>0$,

$\exists$ compact $F\subseteq E$, $mF>0$

So WLOG we let $E=F$.

$mE<\infty \Rightarrow \exists U$ open s.t. $F\subseteq U$

$m(U)<2m(E)$.

Use lemma $\Rightarrow \exists V$ open of 0.

s.t. $V+E\subseteq U$

Claim. $V\subseteq E-E$.

If $v\in V$, just need to prove

$(v+E)\cap E\neq\emptyset$.

If not, $(v+E)\cap E=\emptyset$

$\Rightarrow mU\ge m(v+E)+m(E)$

$\ge 2m(E)$ ↯. $\square$

[证明二] 这个证明在 $\mathbb{R}^n$ 中直接！

Lemma. $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$,

则 $f*g$ 连续.

p.f. $(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)g(x-y)dy$

$\le\|f\|_1\|g\|_\infty$. ✓

取 $f_0\in C_c(\mathbb{R}^n)$ 使 $\|f-f_0\|_1<\varepsilon$.

f_0 在 $\mathrm{supp}(f_0)$ 上一致连续.

$\Rightarrow \exists |h|$ 足够小 $\Rightarrow |f_0(z)-f_0(z+h)|<\varepsilon$.

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n}|f(z)-f(z+h)|dz$

$\le\int_{\mathbb{R}^n}|f(z)-f_0(z)|dz+\int_{\mathbb{R}^n}|f_0(z)-f_0(z+h)|dz$

$+\int_{\mathbb{R}^n}|f_0(z+h)-f(z+h)|dz < (2+m(\mathrm{supp}(f_0)))\varepsilon$

$\Rightarrow |(f*g)(x+h)-f*g(x)|<(2+m(\mathrm{supp}(f_0)))\|g\|_\infty\cdot\varepsilon$.

Back~~~P4.

$m(E\cap(E+z)) = \int_E \mathbb{1}_E(x+z)dx$

$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_E(x)\, \mathbb{1}_E(x+z)\,dx$

$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{-E}(-x)\, \mathbb{1}_E(x+z)\,dx$

$= \mathbb{1}_E * \mathbb{1}_{-E}(z) := h(z)$.

$h(0) = m(E) > 0$，由引理 $\Rightarrow$ h 连续

$\Rightarrow \exists$ 开区间 $\underset{u}{\ni} 0$ s.t. ~~...~~ $h|_u > 0$.

$\Rightarrow \exists\delta, \forall |z|<\delta, m(E\cap(E+z)) > 0$

$\Leftrightarrow z \in E-E$.

若 $mE=\infty$，取 $E\cap B(0,N)$ 即可. $\square$

③ 正测集有不可测子集. ($\mathbb{R}^1$上)

p.f. $m(E)>0$，由② $\Rightarrow \exists\delta$ s.t. $(-\delta,\delta) \subseteq E-E$

取 V 为①中 Vitali set.

设 $V_r = V + r \Rightarrow \mathbb{R} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} V_r$

$E = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} E\cap V_r$

$\Rightarrow m^*(E) \le \sum_r m^*(E\cap V_r)$

若 $E\cap V_r$ 可测，由②

$\Rightarrow$ 相差含无理数，不可能有区间. $\Rightarrow$ 为零测. 但 $m^*(E)>0$

$\Rightarrow \exists r'$ s.t. $m^*(E\cap V_{r'}) > 0$

$\Rightarrow E\cap V_{r'}$ 为不可测! $\square$

---

④ $mE<\infty$，$p'>p \Rightarrow L^{p'}(E) \subseteq L^p(E)$

$mE=\infty$，则互不包含!

「p.f. 设 $\tilde{f} = \max(1,f)$，$\forall f\in L^{p'}$

$\Rightarrow \int_E |f|^p \le \int_E |\tilde{f}|^p$

$\le \int_E |\tilde{f}|^{p'} = \int_{E[f>1]} |f|^{p'} + mE[f\le 1] < \infty$. ✓

$mE=\infty$ 时~~~ ✓ 」

⑤ $f\in L^p(E)\cap L^q(E)$，$1\le p<r\le q$.

则 $f\in L^r(E)$.

「p.f. 设 $\frac{1}{r} = \frac{a}{p} + \frac{1-a}{q}$. $a\in(0,1)$.

$\Rightarrow \int_E |f|^r = \int_E |f|^{ar} |f|^{(1-a)r}$

$\le \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{ar}{p}} \cdot \left(\int_E |f|^q\right)^{\frac{(1-a)r}{q}}$

$(q<\infty)$.

计 $q=\infty \Rightarrow p=ar$

$\Rightarrow \int_E |f|^r \le \|f^{r-p}\|_\infty \int_E |f|^p$ ✓

$\square$ 」