

基础拓扑学期中考试, 2021.5.19

1. (15分) 设 X 为紧拓扑空间, Y 为 T_2 空间, $f: X \rightarrow Y$ 为连续双射, 证明 f 为同胚映射。
2. (15分) 设 X 为紧 T_2 空间, 证明 X 是 T_4 空间。
3. (20分)
 - 1) 设 (X, τ) 拓扑空间, \sim 为 X 上的等价关系, 定义商拓扑空间 X/\sim ,
 - 2) 设 $p: X \rightarrow X/\sim$, 证明 $g: X/\sim \rightarrow Y$ 连续当且仅当 $g \circ p: X \rightarrow Y$ 连续。
4. (20分)
 - 1) 设 (X, τ) 为拓扑空间, $\mathcal{B} \subset \tau$, \mathcal{B} 为 τ 的拓扑基当且仅当对任意 $U \in \tau$, 对任意 $x \in U$, 存在 $B \in \mathcal{B}$, 使得 $x \in B \subset U$;
 - 2) 设 $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in \Lambda}$ 为拓扑空间, 定义乘积拓扑 $\prod_i X_i$, 写出其拓扑基。
5. (15分) 设 Y 为拓扑空间, $f = (f_i)_{i \in \Lambda}: Y \rightarrow \prod_{i \in \Lambda} X_i$ 连续, 当且仅当 $f_i: Y \rightarrow X_i$ 连续。
6. (15分)
 - 1) 设 X, Y 为拓扑空间, 如果 X, Y 同胚, 证明 X 与 Y 的连通分支个数相同。
 - 2) 证明两条相交的直线之并与一条直线不同胚。