拓扑学，期末考试，6.28

1 (10分) 设 X, Y 为拓扑空间。

1) (2分)给出 X 是连通的定义；

2) (4分)设连续映射 $f: X \to Y$ 为满射，若 X 为连通的，证明 Y 是连通的；

3) (2分)若 f 不是满射，阐述你上面证明中的问题；

4) (2分)给出反例：存在连续映射 $f: X \to Y$ 不是满射，X 是连通的，但 Y 不是连通的。

2. (10分)

1) （2分）给出 X 是 Hausdorff 空间的定义；

2) (6分)证明 Hausdorff空间的紧子集为闭子集；

3) （2分）在 X 不是Hausdorff空间的时候，给出2）的反例。

3. （10分）

1) (2分)设 X 为拓扑空间，$A \subset X$，给出闭包 $\bar{A}$的定义；

2) （2分）证明 $x \in \bar{A}$ 当且仅当对 x 的任意邻域 U, $U \cap A \neq \emptyset$；

3) （6分）若 X为第一可数拓扑空间，证明 $x \in \bar{A}$ 当且仅当存在序列 $x_n \in A$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

4 （15分）

1) (5分) 设 X, Y 为拓扑空间，利用拓扑基定义乘积拓扑空间 $X \times Y$，验证你给出的集合簇是一组拓扑基；

2) (10分) 设 $\Delta = \{(x, y) : x = y\} \subset X \times X$，证明 X 为Hausdorff当且仅当 Δ 为 $X \times X$ 的闭子集。

5 (10分) 设 $f: X \to Y$ 为连续单射，X 为紧，Y 为Hausdorff，证明 f 为嵌入映射。

6 (15分) 利用基本群的方法，证明 F_n 可以嵌入到 F_2，其中 F_n 为 n 个整数群 Z的自由积。

7 （15分）计算投影空间 RP^2的基本群。

8 (15分) 设 $p: E \to B$ 为覆叠映射， E, B 均为道路连通的Hausdorff空间，如果 B 是单连通的，证明: p 为同胚映射。