一、度量空间.

▷1.1. Banach 不动点.

[证明] $T:(X,d)\to(X,d)$ 压缩

$x_{n+1}=Tx_n$，则

$$d(x_{n+1},x_n)\le \alpha d(x_n,x_{n-1})\le\cdots\le \alpha^n d(x_1,x_0)$$

$$\Rightarrow d(x_{n+p},x_n)\le \sum_{i=1}^{p} d(x_{n+i},x_{n+i-1})\le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}d(x_1,x_0)\to 0$$

$\Rightarrow \{x_n\}$ 为Cauchy列，由X完备 $\Rightarrow$ 不动点！ 12

Note. (X,d)是紧完备度量空间，且T满足：

$\forall x\ne y$，有 $d(Tx,Ty)<d(x,y)$.

证明 T有唯一不动点.

[证明] 定义 $f(x)=d(x,Tx)$，

则 $d(x,Tx)\le d(x,y)+d(y,Ty)+d(Ty,Tx)$.

$$\Rightarrow |d(x,Tx)-d(y,Ty)|\le d(x,y)+d(Ty,Tx)<2d(x,y).\Rightarrow f \text{ continuous}$$

Since X is compact $\Rightarrow f$ 有最小值

设 $\alpha=\inf_{x\in X} f(x)=f(x_0)$. 若 $\alpha>0$，

则 $d(A(Ax_0),Ax_0)<d(Ax_0,x_0)=\alpha$，

矛盾！$\Rightarrow \alpha=0\Rightarrow x_0$ 为不动点. □

二、赋范空间.

▷2.1. 有界$\Leftrightarrow$连续.

[证明] ($\Rightarrow$) 平凡.

($\Leftarrow$) $T:X\to Y$ 连续，则在0处连续，

则 $\exists\delta$，$\forall x\in X$，$\|x\|_X<\delta\Rightarrow \|Tx\|_Y<1$

$\Rightarrow \forall x$，$\|x\|_X=\delta\Rightarrow \|Tx\|_Y\le 1$.

$\Rightarrow \forall x\in X\setminus\{0\}$，$\|\delta\|x\|_X^{-1}x\|_X=\delta$

$\Rightarrow \|T(\delta\|x\|_X^{-1}x)\|\le 1$.

that is，$\|Tx\|_Y\le \delta^{-1}\|x\|_X$. □

▷2.2. 有限维空间 范数等价

[证明] 取基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，$x=\sum_i x_ie_i$

令 $\|x\|_2=\sqrt{\sum_i|x_i|^2}$，任取范数 $\|\cdot\|$.

① 由 $\|x\|\le\sum_i|x_i|\|e_i\|$

$$\le \|x\|_2\sqrt{\sum_i\|e_i\|^2}=c\|x\|_2$$

② $S=\{x\in X:\|x\|_2=1\}$ 紧 resp. to $\|\cdot\|_2$.

设 $f(x)=\|x\|$，由① $\Rightarrow$ 连续.

$\Rightarrow \exists x_0$ 使 $\|x_0\|\le\|x\|$. 令 $\delta=\|x_0\|$.

则 $\forall x\ne 0$，$\|x\|_2^{-1}x\in S\Rightarrow \|\|x\|_2^{-1}x\|\ge\delta$

$\Rightarrow \|x\|\ge\delta\|x\|_2$. □

▷2.3. 赋范 $(X,\|\cdot\|)$，$\dim X<\infty\Leftrightarrow B$紧$\Leftrightarrow S$紧.

[证明] (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii) 平凡.

(iii)$\Rightarrow$(i) 若 $\dim X=\infty$，取 $x_1,\cdots,x_k\in S$

使 $\|x_i-x_j\|\ge\frac12$，$\forall i\ne j$. $S=\mathrm{Span}(x_1,\cdots,x_k)$.

由 $\dim X=\infty\Rightarrow S\subsetneq X$，则仍可取

$x_{k+1}\in S$，$\|x_i-x_j\|\ge\frac12$ …… ✓ □

Riesz引理.

D2.4. Riesz 引理. ($\|x\|=1$) 赋范. $Y \subset X$ 闭.

固定 $\delta \in (0,1)$, 则 $\exists x \in X$ 使

$$\|x\|=1, \inf_{y \in Y} \|x-y\| \geq 1-\delta.$$

[证明] $x_0 \in X \setminus Y$, 记 $d = \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\| > 0$.

取 $y_0 \in Y \Rightarrow \|x_0 - y_0\| \leq \frac{d}{1-\delta}$

取 $x = \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$, 则 $\|x\|=1$, 且

$$\|x-y\| = \frac{\|x_0 - y_0 - \|x_0 - y_0\| y\|}{\|x_0 - y_0\|}$$

$$\geq \frac{d}{\|x_0 - y_0\|} \geq 1-\delta. \quad \square$$

D2.5. 商空间.

引理2.5.1. $Y \subseteq X$ 闭, 且 $\{[x_i]\}$ 为 X/Y 中 Cauchy 列.

则 $\exists y_k, \exists x_{i_k} \Rightarrow \{x_{i_k} + y_k\}$ 为 X Cauchy 列.

[证明] 取 i_k 使得 $\inf_{y \in Y} \|x_{i_k} - x_{i_{k+1}} + y\| < \frac{1}{2^k}$.

$\Rightarrow \exists \{\eta_k\} \subseteq Y \Rightarrow \|x_{i_k} - x_{i_{k+1}} + \eta_k\| < \frac{1}{2^k}$.

取 $y_1 = 0$, $y_k = -\eta_1 - \cdots - \eta_{k+1}$ ✓ $\square$

$\Rightarrow$ X Banach $\Rightarrow$ X/Y Banach

[证] 取 X/Y 中 Cauchy 列 $\{[x_i]\}$, 则

$\exists y_k, x_{i_k} \Rightarrow \{x_{i_k} + y_k\}$ Cauchy

$\overset{\exists x}{\Rightarrow} \|x - (x_{i_k} + y_k)\| < \varepsilon$.

$\Rightarrow \lim_k \|[x - x_{i_k}]\| = \lim_k \inf_y \|x - (x_{i_k} + y)\|$

$= 0$ ✓ $\square$

D2.6. 对偶空间.

2.6.1. $(\ell^p)^* = \ell^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

[证明]. $e_k = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$

$$(\ell^p)^* \longrightarrow \ell^q$$

$$f \longmapsto \eta = \{f(e_k)\}.$$

① 先证 $\eta \in \ell^q$. $x_k^{(n)} = \begin{cases} |\eta_k|^{q-1} e^{-i\theta_k}, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$ $x^{(n)} = \{x_k^{(n)}\}$.

$\theta_k = \arg(\eta_k)$. $x^{(n)} \in \ell^p$

$$f(x^{(n)}) = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q.$$

$$\text{且 } f(x^{(n)}) \leq \|f\| \left(\sum_k |\eta_k|^{(q-1)p} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|f\| \left(\sum_k (\eta_k)^q \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q \leq \|f\| \left(\sum_k \eta_k^q \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|.$$

$$\Rightarrow \|\eta\|_q \leq \|f\| \Rightarrow \eta \in \ell^q.$$

② 另外, $\forall \eta \in \ell^q$, 定义 $f \in (\ell^p)^*$,

$$f(x) = \sum_k \eta_k x_k$$

Hölder $\Rightarrow \langle \eta, x \rangle \leq \|\eta\|_q \|x\|_p$

$\Rightarrow \|f\| \leq \|\eta\|_q$. $\square$

2.6.2. $(\ell^1)^* = \ell^\infty$.

[证明]
$$(\ell^1)^* \longrightarrow \ell^\infty$$

$$f \longmapsto \eta = \{f(e_k)\}$$

① 由 $|\eta_k| \leq \|f\| \|e_k\| = \|f\|$

$\Rightarrow \|\eta\|_\infty \leq \|f\|$, $\eta \in \ell^\infty$.

② $\forall \eta \in \ell^\infty$, 定义 $f(x) = \sum_k \eta_k x_k$.

$|f(x)| \leq \sum_k |\eta_k| |x_k|$

$\leq \sup_k |\eta_k| \sum_k |x_k| = \|\eta\|_\infty \|x\|_1$

$\Rightarrow f \in (\ell^1)^*$, $\|f\| \leq \|\eta\|_\infty$ $\square$

2.6.3. $(c_0)^* = \ell^1$.

[证明] $\tilde{\Lambda}: \ell^1 \to (c_0)^*$

$y \mapsto \Lambda_y$.

① $|\Lambda_y(x)| \le \sum_k |x_k y_k| \le \|x\|_\infty \|y\|_1$.

$\Rightarrow \|\Lambda_y\| \le \|y\|_1$.

反之，$\exists y = (y_i) \in \ell^1$，定义

$\varepsilon_i = e^{-i\theta_i}$，$\theta_i = \arg y_i$，且

$g_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i \in c_0$，则

$\Lambda_y(g_n) = \sum_{k=1}^n |y_k|$，$\|g_n\|_\infty = 1$.

$\Rightarrow \|\Lambda_y\| \ge \sum_{i=1}^n |y_i| \Rightarrow \|\Lambda_y\| \ge \|y\|_1$.

② 证满：

$\forall \Lambda \in (c_0)^*$，设 $y_i = \Lambda(e_i)$.

下证 $y \in \ell^1$. $\theta_i = \arg y_i$，

$g_n = \sum_{i=1}^n e^{-i\theta_i} e_i$，则 $\|g_n\| = 1$.

$\sum_{k=1}^n |y_i| = \Lambda(g_n) \le \|\Lambda\|$. ✓ □

三、内积空间 & Hilbert空间基础

3.1. 范数诱导内积

$(X, \|\cdot\|)$ 有内积，当且仅当

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

[证明]. 定义

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2), & \text{in } \mathbb{R} \\ \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2), & \text{in } \mathbb{C} \end{cases}$$

□

3.2. Bessel不等式 & Parseval恒等式

Bessel：$\{e_\alpha\}$ 纪，则

$\sum_\alpha |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 \le \|x\|^2$.

证：考虑 $0 \le \|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i\|^2$

$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i\rangle|^2$.

$\Rightarrow |\langle x, e_i\rangle|^2 > \frac{1}{n}$ 只有有穷个，

则 $\sum_\alpha |\langle x, e_\alpha\rangle|^2$ 为可数和. ✓

Parseval：$\{e_\alpha\}$ 完备 $\Leftrightarrow \sum_\alpha |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 = \|x\|^2$.

$\Leftrightarrow x = \sum_\alpha \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha$

3.3. Riesz表示定理

设 H 为Hilbert空间，则

$H \longrightarrow H^*$

$y \longmapsto \langle \cdot, y\rangle$ 为反线性等距满射.

3.3.1. 伴随算子

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{A^*_H} & X \\ \downarrow{\iota_Y} & & \downarrow{\iota_X} \\ Y^* & \xrightarrow{A^*_B} & X^* \end{array}$$

3.3.2. Lax-Milgram定理

$a(x,y)$ 为 H (Hilbert) 上共轭双线性

若有 ① $\exists M > 0$，$|a(x,y)| \le M\|x\|\|y\|$.

② $\exists \delta > 0$，$|a(x,x)| \ge \delta\|x\|^2$.

则 $\exists!$ 可逆 $A \in L(H)$，有

$a(x,y) = \langle x, Ay\rangle$.

$\|A^{-1}\| \le \frac{1}{\delta}$.

[证明]. 由Riesz表示 $\Rightarrow a(x,y) = \langle x, z\rangle$

定义 $A: y \mapsto z$. $\Rightarrow a(x,y) = \langle x, Ay\rangle$.

a. A 单：$Ay_1 = Ay_2 \Rightarrow a(x, y_1 - y_2) = 0$

取 $x = y_1 - y_2 \Rightarrow \|y_1 - y_2\|^2 \le \frac{1}{\delta} a(x,x) = 0$

$\Rightarrow y_1 = y_2$.

b. A 满：利用 ① $\Rightarrow \mathrm{Im}A$ 闭，

再证 $\mathrm{Im}(A)^\perp = \{0\}$. □

□ 3.4. Hilbert 空间中算子的模：

$A: H \to H$.

3.4.1. $\|A\| = \sup\limits_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \dfrac{|\langle x, Ay\rangle|}{\|x\|\|y\|}$.

[证明] 一方面有

$$\frac{|\langle x, Ay\rangle|}{\|x\|\|y\|} \leq \frac{\|x\|\|Ay\|}{\|x\|\|y\|} = \frac{\|Ay\|}{\|y\|}$$

$$\Rightarrow \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \frac{|\langle x, Ay\rangle|}{\|x\|\|y\|} \leq \|A\|$$

另一方面：

$$\frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} = \frac{\langle Ax, Ax\rangle}{\|x\|\|x\|}$$

$$= \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \frac{\langle Ax, Ax\rangle}{\|Ax\|\|x\|}$$

$$\leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \frac{\langle x, Ay\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

$$\Rightarrow \|A\| \leq \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \frac{|\langle x, Ay\rangle|}{\|x\|\|y\|}$$ 即

3.4.2. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=\|y\|=1} |Re\langle x, Ay\rangle|$.

[证明] 由 3.4.1 知

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle x, Ay\rangle|.$$

令 $\tilde{y} = \dfrac{\overline{\langle x, Ay\rangle}}{|\langle x, Ay\rangle|} y$

$\Rightarrow |\langle x, Ay\rangle| = \langle x, A\tilde{y}\rangle \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \checkmark$. □

□ 3.5: 投影算子

$M \subseteq H$, 则 $P_M^2 = P_M$

$\langle x, P_M y\rangle = \langle P_M x, y\rangle$.

3.5.1. $P_L P_M = P_{L\cap M} \Leftrightarrow P_L P_M = P_M P_L$.

[证明] ($\Rightarrow$) $\langle P_L P_M x, y\rangle$

$= \langle P_M x, P_L y\rangle = \langle x, P_M P_L y\rangle$

$\langle P_{L\cap M} x, y\rangle = \langle x, P_{L\cap M} y\rangle$

$= \langle x, P_L P_M y\rangle$

$\Rightarrow P_M P_L = P_L P_M$.

($\Leftarrow$) 记 $P := P_M P_L = P_L P_M$.

若 $x \in L\cap M \Rightarrow Px = x$

· 若 $x = Px \Rightarrow x = P_L P_M x \in L$

$= P_M P_L x \in M$

$\Rightarrow x \in L\cap M$.

则 $x \in L\cap M \Leftrightarrow Px = x$.

由 $P^2 x = Px$ + 自共轭

$\Rightarrow P$ 投影算子 $\Rightarrow P = P_{L\cap M}$. □

□ 3.6 最佳逼近

引理. 若 X 自反，C 为 X 内闭凸集，则

$\exists x_0$ 使 $\|x_0\|$ 最小.

(证明). 取 $m \leq x_n \leq m + \frac{1}{n}$. 其中 $m = \inf\limits_{x\in C} \|x\|$,

且 $x_n \in C$. 由 X 自反 $\Rightarrow C$ 弱闭. 则

$x_n \xrightarrow{w} x_0$. 由 Hahn-Banach 推论

$\Rightarrow \exists f \in X^*$, $\|f\| = 1$, $f(x_0) = \|x_0\|$

且 $f(x_n) \to f(x_0)$, 则 $\|x_0\| \geq m$, 另外有

$\|x_0\| = f(x_0) = \lim\limits_n f(x_n) \leq \lim\limits_n \|f\| \|x_n\|$

$\leq m$ □

注：在Hilbert内积空间若有 $x_0, \tilde{x}_0 \in C$，
使 $\|x_0\| = \|\tilde{x}_0\| = m$，则
$$\|x_0 - \tilde{x}_0\|^2 = 2(\|x_0\|^2 + \|\tilde{x}_0\|^2) - 4\left\|\underbrace{\frac{x_0+\tilde{x}_0}{2}}_{\geq}\right\|^2$$
$$\leq 4d^2 - 4d^2 = 0. \quad \checkmark$$

定理：C为Hilbert空间中闭凸集，则
$\forall y \in X, \exists! x_0 \in C$ 使 $\|y - x_0\| = \inf_{x \in C} \|x - y\|$

[证]. 令 $C - \{y\} = \{x - y : x \in C\}$，用上述. □

四. 泛函大定理 (线性)

▷4.1. 一致有界：X Banach，Y_i normed.
$A_i : X \to Y_i$ bounded.
If $\sup_{i \in I} \|A_i(x)\|_{Y_i} < \infty$，$\forall x \in X$.

Then $\sup_{i \in I} \|A_i\| < \infty$.

[Banach–Steinhaus] $X, Y \Rightarrow$ Banach
$A_i : X \to Y$ bounded. 则下列等价：
i) $\{A_i x\}$ 收敛，$\forall x \in X$.
ii) $\sup_i \|A_i\| < \infty$，且 $\exists$ 稠密 $D \subseteq X$，
$\{A_i x\}$ 收敛，$\forall x \in D$.

▷4.2. 开映射 ① $\Leftrightarrow$ 闭图像 ② $\Leftrightarrow$ 逆算子 ③

①⇒③ $A : X \to Y$ is open
⇒ A^{-1} 连续 ⇒ A^{-1} 有界. □

$$\begin{matrix} ① \\ \Updownarrow \\ ③ \leftrightarrows ② \end{matrix}$$

③⇒①
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[rr, bend right, "A"'] & X/\ker A \arrow[r, "\tilde{A}"] & Y \end{tikzcd}$$

$q : X \to X/\ker A$ 开，$\tilde{A}$ 可逆 ⇒ $\tilde{A}$ 开
⇒ $A = \tilde{A} \circ q$ 也开. □

②⇒③ $\Gamma = \{(x, Ax) : x \in X\}$，
$\|(x,y)\|_\Gamma = \|x\|_X + \|y\|_Y$，$\pi : (x,y) \mapsto x$ 双射
⇒ $\exists \pi^{-1}$ 有界 ⇒ $\exists c > 0$，$\|x\|_X + \|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X$
⇒ A 有界 ✓ □

②⇒③ $A : X \to Y$ 为有界双射，
则 $A^{-1} : Y \to X$，要证 A^{-1} 连续.

$$\begin{cases} y_n \to y \\ A^{-1} y_n \to x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_n \to y \\ y_n \to Ax \end{cases} \Rightarrow Ax = y \Rightarrow x = A^{-1} y$$

⇒ 闭图像 ✓ □

▷4.3. Hahn–Banach 定理

4.3.1 Cor. X normed space. $A, B \subseteq X$ 凸.
且 A 闭，B 紧，则 $\exists \Lambda \in X^*$ 使
$$\inf_{x \in A} \Lambda(x) > \sup_{y \in B} \Lambda(y).$$

[证明]. $\delta = \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\|$.

① 先证 $\delta > 0$：取 $\|\underset{\in A}{x_n} - \underset{\in B}{y_n}\| \to \delta$.
B紧 ⇒ $y_n \to y \in B$.
若 $\delta = 0 \Rightarrow x_n = y_n + x_n - y_n \to y$，矛盾！

② $U = \bigcup_{x \in A} B_\delta(x)$ 为开凸集. $U \cap B = \phi$.
由凸集分离 ⇒ $\exists \Lambda \in X^*$，$\Lambda(x) > c := \sup_{y \in B} \Lambda(y)$.
$\forall x \in U$.

取 $\xi \in X$ 使 $\|\xi\| < \delta$，$\varepsilon := \Lambda(\xi) > 0$
则 $\forall x \in A$，$x - \xi \in U$.
⇒ $\Lambda(x) - \varepsilon = \Lambda(x - \xi) > c$ ✓ □

4.3.2. X赋范，$Y \subseteq X$ 子空间，$x_0 \in X \setminus Y$.
令 $\delta = d(x_0, Y)$. 则 $\delta > 0$，且
$\exists x^* \in Y^\perp$ 使 $\|x^*\| = 1$，$x^*(x_0) = \delta$.

[证明] $\delta > 0$ 显然. $Z = Y \oplus \mathbb{R}x_0$
定 $\psi : Z \to \mathbb{R}$ 为 $y + tx_0 \mapsto \delta t$.
⇒ $\psi(y) = 0$，$\psi(x_0) = \delta$.
$$\frac{|\psi(y + tx_0)|}{\|y + tx_0\|} = \frac{|t|\delta}{\|y + tx_0\|} = \frac{\delta}{\|t^{-1}y + x_0\|} \leq 1.$$

由Hahn-Banach ⇒ $\exists x^*\in X^*$, $\|x^*\|\le 1$.

$x^*(x)=\psi(x)$, $\forall x\in Z$.

且 $\|x^*\|\ge \sup_{y\in Y}\frac{|\psi(x_0+y)|}{\|x_0+y\|}=\sup_{y\in Y}\frac{\delta}{\|x_0+y\|}=1$.

$\Rightarrow \|x^*\|=1$ □

Cor. $Y=\{0\}\Rightarrow x_0\neq 0$
$\Rightarrow \|x^*\|=1$ & $x^*(x_0)=\|x_0\|$ □.

Cor. $\bar{Y}={}^{\perp}(Y^{\perp})$.

Cor. ① $X^*/Y^{\perp}\to Y^*$
$[x^*]\mapsto x^*|_Y$ 等距双

② $\pi: X\to X/Y$, 则
$(X/Y)^*\to Y^{\perp}$ 等距双.
$\Lambda\mapsto\Lambda\circ\pi$

五. 自反空间基础

▷5.1. X自反 ⇔ X^*自反.

[证明] (⇒) X自反, 取 $\Lambda: X^{**}\to\mathbb{R}$, $\iota: X\to X^{**}$ 同构

定义 $\underset{x^*}{\underset{\shortparallel}{\Lambda\circ\iota}}\in X^*$. $\forall x^{**}\in X^{**}$, $x=\iota^{-1}(x^{**})$

则 $\Lambda(x^{**})=\Lambda\circ\iota(x)=x^*(x)=x^{**}(x^*)$
$\Rightarrow \Lambda=\langle\cdot,x^*\rangle\Rightarrow$ ✓ □

(⇐) X^*自反, 由于 $\iota(X)\subseteq X^{**}$ 闭, 下证 $\iota(X)^{\perp}=\{0\}$.
取 $\Lambda\in X^{***}$, 使 $\Lambda\circ\iota=0$. 由X^*自反, 则
$\Lambda=\langle\cdot,x^*\rangle$. 故
$\forall x\in X$, $\langle x^*,x\rangle=\langle x^{**},x^*\rangle=\Lambda\circ\iota(x)=0$
$\Rightarrow x^*=0\Rightarrow\Lambda=0$ ✓. □

▷5.2 (Pettis) 若X自反, $Y\subseteq X$ 闭子空间,
则 Y自反, X/Y自反.

▷5.3 ① 若X^*可分, 则X可分.
② 设X自反, 且X可分 ⇒ X^{**}可分.

[证明] ① 取可数稠密集 $\{x_i^*\}\subseteq X^*$,
取 $x_i\in X$ 使 $\|x_i\|=1$, $\langle x_i^*,x_i\rangle\ge\frac12\|x_i^*\|$.
设 $Y=\mathrm{span}(x_i)$, 则 下证 $\bar{Y}=X$.
固定 $x^*\in Y^{\perp}$, 则 $\exists i_k\Rightarrow\lim_k\|x^*-x^*_{i_k}\|=0$.
$\Rightarrow\|x^*_{i_k}\|\le 2|\langle x^*_{i_k},x_{i_k}\rangle|=2|\langle x^*_{i_k}-x^*,x_{i_k}\rangle|$
$\le 2\|x^*_{i_k}-x^*\|\|x_{i_k}\|=2\|x^*_{i_k}-x^*\|$.
$\Rightarrow x^*=\lim_k x^*_{i_k}=0.\Rightarrow Y^{\perp}=\{0\}$ ✓ □

② X可分且X自反 ⇒ X^{**}可分. 由① ⇒ X^*可分 □

六. W & W* 拓扑

▷6.1 F为X的一族泛函, 取X的拓扑 $\mathcal{U}_F$. 则
① $\Lambda\in X^*$连续 ⇔ $\ker\Lambda$闭 ⇔ $\Lambda\in F$.
② $E\subseteq X$ 子空间, 则 $\bar{E}=\bigcap_{\substack{\Lambda\in F\\ E\subseteq\ker\Lambda}}\ker\Lambda$.

〈引理〉. $\Lambda_1,\dots,\Lambda_n\in X^*$ 线性无关, 则
(a) $\exists x_i\in X$, $\Lambda_i(x_j)=\delta_{ij}$.
(b) 若 $\bigcap_{i=1}^n\ker\Lambda_i\subseteq\ker\Lambda$ 则 $\Lambda\in\mathrm{span}(\Lambda_i)$.

〈引理证明〉 $(a)_1$ 自然成立.

$(a)_n\Rightarrow(b)_n$. $\bigcap_{i=1}^n\ker\Lambda_i\subseteq\ker\Lambda$, $\exists x_i\in X$ 使
$\Lambda_i(x_j)=\delta_{ij}$. 取$x$, 则:
$x-\sum_{i=1}^n\Lambda_i(x)x_i\in\bigcap_{j=1}^n\ker\Lambda_j\subseteq\ker\Lambda$
$\Rightarrow\Lambda(x)=\sum_{i=1}^n\Lambda_i(x)\Lambda(x_i)$
$\Rightarrow\Lambda=\sum_{i=1}^n\Lambda(x_i)\Lambda_i$ ✓

$(b)_n\Rightarrow(a)_{n+1}$. $\Lambda_1,\dots,\Lambda_{n+1}\in X^*$,
定义 $Z_i=\bigcap_{j\neq i}\ker\Lambda_j\Rightarrow\Lambda_i\notin\mathrm{span}\{\Lambda_j, j\neq i\}$
故 $\forall i$, $\exists x_i\in Z_i$, $\Lambda_i(x_i)=1$. □

[6.1 证明] ① (iii)⇒(i)⇒(ii) 显然, 下证 (ii)⇒(iii).
$\ker\Lambda$闭, $X\setminus\ker\Lambda$开. $x\in X\setminus\ker\Lambda$
$V=\bigcap_{i=1}^n\{y\in X: |\Lambda_i(y)-\Lambda_i(x)|<\varepsilon\}\subset X\setminus\ker$

取 $y\in\bigcap_{i=1}^n \ker\Lambda_i$

$\Rightarrow x+ty\in V \Rightarrow x+ty\notin\ker\Lambda$

$\Rightarrow \Lambda(x)+t\Lambda(y)\neq 0$

$\Rightarrow \Lambda(y)\neq 0 \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n\ker\Lambda_i\subseteq\ker\Lambda$ □

引理 $\Rightarrow \Lambda\in\mathrm{Span}(\Lambda_i)\subseteq\mathcal{F}$.

② $\forall\Lambda$ s.t. $E\subseteq\ker\Lambda \Rightarrow \bar{E}\subseteq\ker\Lambda$.

反之，取 $x\in X\setminus\bar{E}$，$\exists$ 凸开集 $U\ni x$，$U\cap\bar{E}=\phi$.

$\exists\Lambda\in\mathcal{F}$ 使 $\Lambda(x)>\sup_{y\in\bar{E}}\Lambda(y)$,

$\Rightarrow E\subseteq\ker\Lambda \Rightarrow \Lambda(x)>0$ √ □

▷ 6.2. Weak 拓扑. ($X\Rightarrow$ 赋范空间).

6.2.1. 闭凸集 $\Rightarrow$ 弱闭.

[证明] $K\subseteq X$ 为闭凸集，取 $x_0\in X\setminus K$.

$\exists\delta>0$, $B_\delta(x_0)\cap K=\phi$. 由凸集分离定理

知 $\exists x^*\in X^*$, $c\in\mathbb{R}$ 使 $\begin{cases}\langle x^*,x\rangle>c & \forall x\in B_\delta(x_0)\\ \langle x^*,x\rangle<c, & \forall x\in K.\end{cases}$

$\Rightarrow U=\{x\in X:\langle x^*,x\rangle>c\}$ 为弱开集

$\Rightarrow K$ 弱闭. □

Cor. $E\subseteq X$ 子空间，则 ${}^\perp(E^\perp)=\bar{E}$ 为闭包 & 弱闭包.

Cor. (Mazur). $\mathrm{conv}(S)=\left\{\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i;\ n\in\mathbb{N}, x_i\in S, \lambda_i\geq 0, \sum\lambda_i=1\right\}$

若 $x_i\xrightarrow{w}x$，则 $x\in\overline{\mathrm{conv}(x_i)}$.

6.2.2. X 无限维，则 $\bar{S}^w=B$.

[证明] $\bar{S}^w\subseteq B$ 平凡，下证 $B\subseteq\bar{S}^w$.

$\forall x_0\in B$, U 为弱开集使 $x_0\in U$.

$\exists x_1^*,\dots,x_n^*\in X^*$, $\varepsilon>0$ 使得

$V=\{x\in X:|\langle x_i^*,x-x_0\rangle|<\varepsilon, i=1,\dots,n\}\subseteq U$

X 无限维 $\Rightarrow\exists y\neq 0$, $\langle x_i^*,y\rangle=0$, $\forall i$

$\exists t$, $\|x_0+ty\|=1 \Rightarrow x_0+ty\in V\cap S\Rightarrow U\cap S\neq\phi$.

$\Rightarrow x_0\in\bar{S}^w$. □

▷ 6.3. weak* 拓扑 ($X^*\Rightarrow$ dual of X).

Cor. $({}^\perp E)^\perp=E$ 的弱*闭包.

Cor. B^* 为 S^* 的弱*闭包

[证明] $F_x=\{x^*\in X^*:\langle x^*,x\rangle\leq 1\}$, $x\in S$.

$\Rightarrow F_x$ 弱*闭 $\Rightarrow B^*=\bigcap_{x\in S}F_x$ 弱*闭

设 K 为 S^* 的弱*闭包 $\Rightarrow K\subseteq B^*$,

而 由于 K 为 S^* 弱闭包 $\Rightarrow B^*$ 为 S^* 弱闭包

$\Rightarrow B^*\subseteq K$. □

Cor $\iota: X\longrightarrow X^{**}$, 则 $\iota(x)$ 在 X^{**} 中弱*稠密

[证明] 由 ${}^\perp\iota(x)=\{0\}$. □

▷ 6.4 重要定理 ($X\Rightarrow$ normed space)

6.4.1. (Banach-Alaoglu)

① 若 X 可分，则 X^* 中任意有界列有弱*收敛子列.

② $B^*\subseteq X^*$ 是弱*紧的.

[证] 只证①: X 可分 $\Rightarrow D=\{x_1,\dots,x_n,\dots\}\subseteq X$ 为可数稠子集. $\forall$ 有界列 $\{x_n^*\}$

用对角 Argument $\Rightarrow\exists$ 子列使 $\langle x_{n_i}^*,x_k\rangle$ 收敛, $\forall k$.

Banach-Steinhaus $\Rightarrow\exists x^*\in X^*$ 使

$\langle x^*,x\rangle=\lim_i\langle x_{n_i}^*,x\rangle$.

$\Rightarrow x_{n_i}^*\xrightarrow{w^*}x^*$. □

6.4.2. (Eberlein-Šmulyan). X Banach

则 (i) X 自反 $\Leftrightarrow$ (ii) B 弱紧

[证明] 只证 (i) $\Rightarrow$ (ii). 若 X 自反 $\Rightarrow X^*$ 自反

$\Rightarrow X^{**}$ 上弱拓扑 $\Leftrightarrow$ 弱*拓扑, 由 Alaoglu

$\Rightarrow B^{**}\subset X^{**}$ 弱*紧 $\Rightarrow$ 弱紧 $\Rightarrow B\subseteq X$ √. □

七、对偶算子 & 闭值域定理

7.1. 对偶算子

~~定理~~1. $A: X\to Y$, $A^*: Y^*\to X^*$.

则 $(\operatorname{Im} A)^\perp = \ker A^*$, ${}^\perp(\operatorname{Im} A^*) = \ker A$.

7.2. 闭值域定理

X, Y 为 Banach 空间, $A: X\to Y$ & $A^*: Y^*\to X^*$.

则① $\operatorname{Im} A \subseteq Y$ 闭 $\iff \exists C>0$, 使 $\forall x\in X$ 有

$$\inf_{\xi\in\ker A}\|x+\xi\|_X \le C\|Ax\|_Y.$$

② $\operatorname{Im} A^* \subseteq X^*$ 为弱*闭 $\iff \operatorname{Im} A^* \subseteq X^*$ 强闭.

[证明]. ① ($\Rightarrow$) 设 $X_0 = X/\ker A$, $Y_0 = \operatorname{Im} A$

则 $A: X\to Y \Rightarrow A_0: X_0\to Y_0$ 为双射

且有界. $\Rightarrow$ 逆算子 $\Rightarrow \exists A_0^{-1}: Y_0\to X_0$ 有界

$\Rightarrow \|A_0^{-1}y\|_{X_0} \le C\|y\|_{Y_0} \Rightarrow \checkmark$

($\Leftarrow$) X_0 as before, $A_1: X_0\to Y$.

有界且 $\|[x]\| \le C\|A_1[x]\|$.

设 $y_n\in \operatorname{Im} A$, $y_n\to y\in Y$, $[x_n]\to[x]$.

A_1 连续 $\Rightarrow Ax = y \Rightarrow y\in \operatorname{Im} A$. □

② ($\Rightarrow$) 平凡. ($\Leftarrow$) 只需证 $\operatorname{Im} A^* = (\ker A)^\perp$.

即证 $\operatorname{Im} A^* \supseteq (\ker A)^\perp$. 取 $x^*\in(\ker A)^\perp$,

?. $\begin{cases} 取 r^*\in\mathcal{L}(\operatorname{Im} A, \mathbb{R}) 使若 y = Ax, 则 \\ \qquad r^*(y) = x^*(x) \\ 则 r^*(y) = x^*(x) = x^*(x-z), \forall z\in\ker A \\ \Rightarrow |r^*(y)| \le \|x^*\| \inf_{z\in\ker A}\|x-z\|, \text{use ① (converse)} \end{cases}$

$\Rightarrow r^*$ bounded.

Use Hahn-Banach $\Rightarrow y^*\in\mathcal{L}(Y,\mathbb{R}) = Y^*$

$\langle y^*, Ax\rangle = \langle A^*y^*, x\rangle$

$\overset{\parallel}{\langle x^*, x\rangle} \Rightarrow x^* = A^*y^* \in \operatorname{Im} A^*$ □

(更多, 见书后 Lemma).

八、紧算子基础

▷8.1. 设 X, Y Banach.

① $K: X\to Y$ 紧算子, 则 K 全连续;

② X 自反, K 全连续 $\Rightarrow K$ 为紧算子.

[证明] ① 设 $x_n \xrightarrow{w} x$. ~~设 Kx_n 不 $\to Kx$,~~

~~$\Rightarrow \exists\{x_{n_i}\} \Rightarrow \|Kx - Kx_{n_i}\| \ge \varepsilon$.~~

~~[illegible]~~ 由 $x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow$ 共鸣定理 $\Rightarrow \{x_n\}$ 有界.

由 K 紧 $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ 有子列 (仍记作 x_{n_i}).

$\Rightarrow \{Kx_{n_i}\}$ 为 Cauchy 列, 收敛于 $y\in Y$

$\forall y^*\in Y^*$, 有

$\langle y^*, y\rangle = \lim_i \langle y^*, Kx_{n_i}\rangle = \lim_i \langle K^*y^*, x_{n_i}\rangle$

$= \langle K^*y^*, x\rangle = \langle y^*, Kx\rangle \Rightarrow y = Kx$ ~~[illegible]~~ □

② ~~[illegible]~~ K 全连续. $\forall$ 有界列 $\{x_n\}$

由 X 自反 $\Rightarrow \{x_n\}$ 有弱收敛子列 $\{x_{n_i}\}$.

$\{Kx_{n_i}\}$ $\xrightarrow{\text{Cauchy 列}}$ $\Rightarrow K$ 为紧. □

▷8.2. X, Y, Z 为 Banach, 则

① $A: X\to Y$, $B: Y\to Z$ 有界, 其中有一个为紧

$\Rightarrow BA: X\to Z$ 紧.

② $K_i: X\to Y$ 紧, 且 $\|K_i - K\|\to 0$

$\Rightarrow K: X\to Y$ 紧.

③ $\underbrace{K: X\to Y 紧 \iff K^*: Y^*\to X^* 紧}$

(紧算子在 $\mathcal{L}(X,Y)$ 中闭).

九、Fredholm 算子

Lemma. X, Y Banach, $A: X\to Y$ 有界，且 $\dim \operatorname{coker} A<\infty$ 则 $\operatorname{Im} A$ 闭.

[证] $m := \dim\operatorname{coker} A$，取 $y_1, \dots, y_m \in Y$ 使 $[y_i]$ 为 $Y/\operatorname{Im} A$ 一组基.

设 $\tilde{X} := X\times \mathbb{R}^m$，赋乘积范数.

$\tilde{A}: \tilde{X}\to Y$，$(x,\lambda)\mapsto Ax+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i y_i$

$\Rightarrow$ $\tilde{A}$ 为满射，且 $\ker\tilde{A} = \ker A\times\{0\}$.

$\Rightarrow$ $\exists C>0$ 使

$$\inf_{\xi\in\ker A}\|x+\xi\|_X+\|\lambda\|_{\mathbb{R}^m}\le C\Big\|Ax+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i y_i\Big\|_Y.$$

令 $\lambda=0$ $\Rightarrow$ $\inf_{\xi\in\ker A}\|x+\xi\|_X\le C\|Ax\|_Y$. □

▷ 9.1. 基本性质：X, Y Banach，$A\in\mathcal{L}(X,Y)$

① 若 A & A^* 闭值域，则 $\dim\ker A^* = \dim\operatorname{coker} A$，$\dim\operatorname{coker} A^* = \dim\ker A$.

② A^* Fredholm $\iff$ A Fredholm.

③ 若 A Fredholm $\Rightarrow$ $\operatorname{Index}(A^*) = -\operatorname{Index}(A)$.

[证明] 只需证 ① 即可.

闭值域 $\Rightarrow$ $\begin{cases}\operatorname{Im} A^* = \ker A^{\perp}\\ \ker A^* = \operatorname{Im} A^{\perp}\end{cases}$

$\Rightarrow$ $\begin{cases}(\ker A)^* = X^*/\ker A^{\perp} = X^*/\operatorname{Im} A^* = \operatorname{coker} A^*\\ (\operatorname{coker} A)^* = (X/\operatorname{Im} A)^* = \operatorname{Im} A^{\perp} = \ker A^*\end{cases}$ □

▷ 9.2 <u>Fredholm 定理</u>. X, Y Banach，$A: X\to Y$ 有界. 则下列等价.

① A 为 Fredholm；

② $\exists$ 有界 $F: X\to Y$ 使 $I_X - FA$ & $I_Y - AF$ 紧算子.

▷ 9.3. 指标性质.

① $A: X\to Y$ & $B: Y\to Z$ Fredholm $\Rightarrow$ BA Fredholm，且 $\operatorname{Ind}(BA) = \operatorname{Ind}(B)+\operatorname{Ind}(A)$；

② $D: X\to Y$ Fredholm，$\forall K: X\to Y$ 紧 $\Rightarrow$ $D+K$ Fredholm，$\operatorname{Ind}(D+K) = \operatorname{Ind}(D)$

③ $\exists\varepsilon>0$，P 有界，$\|P\|<\varepsilon$，则 $D+P$ Fredholm & $\operatorname{Ind}(D+P) = \operatorname{Ind}(D)$ (open).

十、谱理论.

▷ 10.1. 谱集基本性质 (X Banach) $A\in\mathcal{L}(X)$.

① $\sigma(A)$ 为 $\mathbb{C}$ 上紧集；

② $\sigma(A^*) = \sigma(A)$.

[证明] ① $\sigma(A)$ 有界，下证 $\sigma(A)$ 闭.

(此时要用 A 为闭算子)

<u>引理</u>. $T\in\mathcal{L}(X)$，$\|T\|<1$，则 $(I-T)^{-1}\in\mathcal{L}(X)$.

<u>引理证明</u>. 只需 $\|(I-T)^{-1}\|\le M \iff \forall y, \exists! x\in X$ 使 $Sx := y+Tx$ 不动点 且 $\|x\|\le M\|y\|$.

由 $\|Sx - Sx'\|\le\|T\|\|x-x'\|$ $\Rightarrow$ 压缩映射

$\Rightarrow$ $\exists! x = Sx = y+Tx$ 且 $\|x\|\le\frac{\|y\|}{1-\|T\|}$.

下证 $\rho(A) = \mathbb{C}\setminus\sigma(A)$ 开. $\lambda_0\in\rho(A)$

$$\lambda I - A = (\lambda-\lambda_0)I + (\lambda_0 I - A)$$

$$= (\lambda_0 I - A)\big(I + (\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I - A)^{-1}\big).$$

当 $|\lambda-\lambda_0| < \|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|^{-1}$ 时，

$B = \big[I + (\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I - A)^{-1}\big]^{-1}\in\mathcal{L}(X)$

$\Rightarrow$ $(\lambda I - A)^{-1} = B\cdot R_{\lambda_0}(A)\in\mathcal{L}(X)$ ✓ □

② 由 $(\lambda I_X - A)^* = \lambda I_{X^*} - A^*$. ✓ □

▷10.2. 基本定理.

10.2.1. 预解公式：$\lambda,\mu\in\rho(A)$，则

$$R_\lambda(A)-R_\mu(A)=(\mu-\lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A)$$

10.2.2. $\lambda\mapsto R_\lambda(A)$ 为算子值全纯函数.

[证明]. $\lambda_0\in\rho(A)$.

$$\|R_\lambda(A)\|\le\|R_{\lambda_0}(A)\|\,\|(I+(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}(A))^{-1}\|$$

$$\le 2\|R_{\lambda_0}(A)\|\quad\left(|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{2\|R_{\lambda_0}(A)\|}\right).$$

由预解公式有

$$\|R_\lambda(A)-R_{\lambda_0}(A)\|\le|\lambda-\lambda_0|\,\|R_\lambda(A)\|\,\|R_{\lambda_0}(A)\|$$

$$\le 2\|R_{\lambda_0}(A)\|\,|\lambda-\lambda_0|\to 0$$

$\Rightarrow \lambda\mapsto R_\lambda(A)$ 连续，全纯性再用预解式 ✓ □

10.2.3. A有界，则 $\sigma(A)\neq\emptyset$

[证明]. 若 $\rho(A)=\mathbb{C}\Rightarrow R_\lambda(A)$ 为整函数

$|\lambda|>\|A\|$时，$R_\lambda(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{n+1}}A^n$

则 $\|R_\lambda(A)\|\le\frac{1}{|\lambda|-\|A\|}\Rightarrow$ 有界

由Liouville定理，$\forall f\in\mathcal{L}(X)^*$，

$f(R_\lambda(A))\equiv C_f$，与$\lambda$无关

由Hahn-Banach $\Rightarrow R_\lambda(A)$与λ无关，

这与预解式矛盾！ □

10.2.4. (谱半径). $A\in\mathcal{L}(X)$，X Banach

则 $r_A:=\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{\frac{1}{n}}=\sup_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|$.

▷10.3. Hilbert空间内的正规&自伴算

Lemma. H为Hilbert，$A\in\mathcal{L}(H)$，则

① A正规 $\Leftrightarrow\forall x\in H$，$\|A^*x\|=\|Ax\|$

② A酉 $\Leftrightarrow\forall x\in H$，$\|A^*x\|=\|Ax\|=\|x\|$.

③ A自伴 $\Leftrightarrow\forall x\in H$，$\langle x,Ax\rangle\in\mathbb{R}$.

[证明] ①($\Rightarrow$) $\|Ax\|^2=\langle Ax,Ax\rangle=\langle x,A^*Ax\rangle$

$=\langle x,AA^*x\rangle=\langle A^*x,A^*x\rangle=\|A^*x\|^2$.

($\Leftarrow$) $\mathrm{Re}\langle Ax,Ay\rangle=\frac14\left(\|Ax+Ay\|^2-\|Ax-Ay\|^2\right)$

$=\frac14\left(\|A^*x+A^*y\|^2-\|A^*x-A^*y\|^2\right)$

$=\mathrm{Re}\langle A^*x,A^*y\rangle$.

且 $\mathrm{Im}\langle Ax,Ay\rangle=\mathrm{Re}\langle Aix,Ay\rangle$

$=\mathrm{Re}\langle A^*ix,A^*y\rangle=\mathrm{Im}\langle A^*x,A^*y\rangle$.

$\Rightarrow\langle A^*Ax,y\rangle=\langle Ax,Ay\rangle=\langle A^*x,A^*y\rangle$

$=\langle AA^*x,y\rangle$. □

②($\Rightarrow$) $\|Ax\|^2=\langle x,A^*Ax\rangle=\|x\|^2$.

($\Leftarrow$). $\mathrm{Re}\langle Ax,Ay\rangle=\frac14\left(\|Ax+Ay\|^2-\|Ax-Ay\|^2\right)$

$=\frac14\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)=\mathrm{Re}\langle x,y\rangle$

$\mathrm{Im}\langle Ax,Ay\rangle=\mathrm{Re}\langle Aix,Ay\rangle=\mathrm{Im}\langle x,y\rangle$.

$\Rightarrow\langle A^*Ax,y\rangle=\langle Ax,Ay\rangle=\langle x,y\rangle$. □

③($\Rightarrow$) $\overline{\langle x,Ax\rangle}=\langle Ax,x\rangle=\langle x,Ax\rangle\Rightarrow$ ✓ □

($\Leftarrow$) $\langle x,Ax\rangle\in\mathbb{R}$. 则$\forall x,y\in H$：

$\mathrm{Im}\langle x,Ay\rangle-\mathrm{Im}\langle Ax,y\rangle$

$=\mathrm{Im}\left(\langle x,Ay\rangle+\langle y,Ax\rangle\right)$

$=\frac12\mathrm{Im}\left(\langle x+y,Ax+Ay\rangle-\langle x-y,Ax-Ay\rangle\right)=0$

$\mathrm{Re}\langle x,Ay\rangle-\mathrm{Re}\langle Ax,y\rangle=\mathrm{Im}(\sim)=0$

$\Rightarrow\langle A^*x,y\rangle=\langle x,Ay\rangle=\langle Ax,y\rangle$. □

10.3.1. 正规算子的谱.

H 为 Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ 正规, 则

① $\|A^n\| = \|A\|^n$, 故 $\|A\| = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$.

② $R\sigma(A^*) = R\sigma(A) = \phi$, $P\sigma(A^*) = \{\bar\lambda : \lambda \in P\sigma(A)\}$

③ 若 A 酉 $\Rightarrow \sigma(A) \subseteq S^1$.

证明 ① 取 x 为单位向量, 由正规性.

$$\|Ax\|^2 = \langle x, A^*Ax\rangle \le \|A^*Ax\| \overset{?}{=} \|A^2x\|$$

$$\Rightarrow \|A^2\| \le \|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 \le \sup_{\|x\|=1} \|A^2x\| = \|A^2\|$$

$$\Rightarrow \|A^2\| = \|A\|^2. \quad \Rightarrow \|A^{2^m}\| = \|A\|^{2^m}$$

$\forall n \ge 1, \exists m, n < 2^m$, 则

$$\|A\|^{2^m-n}\|A\|^n = \|A^{2^m}\| \le \|A^n\|\,\|A\|^{2^m-n}$$

$$\Rightarrow \|A\|^n = \|A^n\|. \quad ✓. \quad \square$$

② 由引理 $\Rightarrow \ker(\bar\lambda I - A^*) = \ker(\lambda I - A)$

$$\Rightarrow \overline{\mathrm{Im}(\lambda I - A)} = \ker(\bar\lambda I - A^*)^\perp = \ker(\lambda I - A)^\perp.$$

$\Rightarrow \lambda I - A$ 单 $\Leftrightarrow$ 像稠密

$\Rightarrow R\sigma(A) = \phi$, ——— . $\square$

③ $\lambda \in \sigma(A)$, $|\lambda| \le 1$. $\lambda \ne 0$ since A 可逆

但 $\lambda^{-1}I - A^{-1} = (\lambda A)^{-1}(A - \lambda I)$ 不可逆.

$\Rightarrow \lambda^{-1} \in \sigma(A^{-1})$

$\Rightarrow |\lambda|^{-1} \le \|A^{-1}\| = \|A^*\| = 1$ $\square$.

10.3.2. 自伴算子的谱.

设 X, Y 为 Hilbert, $T: X \to Y$ 有界.

$$\|T\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \langle x, T^*Tx\rangle$$

$$\le \|T^*T\| \le \|T^*\|\,\|T\| = \|T\|^2.$$

H 为 Hilbert, A 自伴, 则

① $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$;

② $\sup\sigma(A) = \sup_{\|x\|=1} \langle x, Ax\rangle$,

$\inf\sigma(A) = \inf_{\|x\|=1} \langle x, Ax\rangle$,

$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, Ax\rangle|$.

证明 ① 设 $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. $\forall x \in H$, 有

$$\|\lambda x - Ax\|^2 = |\lambda|^2\|x\|^2 - \lambda\langle Ax, x\rangle - \bar\lambda\langle x, Ax\rangle + \|Ax\|^2$$

$$= |\mathrm{Im}\lambda|^2\|x\|^2 + |\mathrm{Re}\lambda|^2\|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\lambda\langle Ax, x\rangle + \|Ax\|^2$$

$$= |\mathrm{Im}\lambda|^2\|x\|^2 + \|(\mathrm{Re}\lambda)x - Ax\|^2$$

$$\ge |\mathrm{Im}\lambda|^2\|x\|^2$$

$\Rightarrow \lambda I - A$ 有下界, 由自伴

$\overline{\mathrm{Im} A} = \ker A^\perp = H$, 且 $\mathrm{Im} A$ 闭

$\Rightarrow \lambda I - A$ 可逆. $\square$

② 不妨设 $\langle x, Ax\rangle > 0$, $\forall x \in H$. $(A \to A + aI, a >> 0)$

先证 $\sigma(A) \subseteq [0, +\infty)$.

取 $\varepsilon > 0$, $\varepsilon\|x\|^2 = \langle x, \varepsilon x\rangle \le \langle x, \varepsilon x + Ax\rangle \le \|x\|\,\|\varepsilon x + Ax\|$

$\Rightarrow \varepsilon\|x\| \le \|\varepsilon x + Ax\| \Rightarrow$ injective & closed image. $\Rightarrow \overline{\mathrm{Im}(\varepsilon I + A)} = (\ker(\varepsilon I + A))^\perp = H$

$\Rightarrow \varepsilon I + A$ 双射 $\Rightarrow -\varepsilon \notin \sigma(A)$ ✓

再记 $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \langle x, Ax \rangle$.

记 $a = \sup_{\|x\|=1} \langle x, Ax \rangle$, $x \in H$, $\|x\|=1$.

$\Rightarrow \langle x, Ax \rangle \le \|x\| \|Ax\| \le \|A\| \|x\|^2 = \|A\|$.

$\Rightarrow a \le \|A\|$. 反之, $\forall x, y \in H$, 有

$$\mathrm{Re}\langle x, Ay \rangle = \frac{1}{4}\langle x+y, A(x+y) \rangle - \frac{1}{4}\langle x-y, A(x-y) \rangle$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}\langle x-y, A(x-y) \rangle \le \mathrm{Re}\langle x, Ay \rangle \le \frac{1}{4}\langle x+y, A(x+y) \rangle$$

取 $\|x\| = \|y\| = 1$, 则

$$-a \le -\frac{a}{4}\|x-y\|^2 \le \mathrm{Re}\langle x, Ay \rangle \le \frac{a}{4}\|x+y\|^2 \le a$$

$\Rightarrow |\mathrm{Re}\langle x, Ay \rangle| \le a$, $\|x\| = \|y\| = 1$.

$\Rightarrow \|A\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\mathrm{Re}\langle x, Ay \rangle| \le a$. □

一些结论&题

1. $\{e_1, \cdots, e_n, \cdots\}$ 为 Hilbert H 的正交基，

设 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 亦构成正交集，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n-f_n\|^2<\infty$，

则 $\{f_i\}$ 构成完全正交集.

[证明] 不妨设 $\{f_i\}$ 规范正交，则

$\forall i,j$，$|\langle e_j-f_j, e_i\rangle| = |\langle e_i-f_i, f_j\rangle|$

$\Rightarrow$ Parseval $\Rightarrow \sum_j \|e_j-f_j\|^2 = \sum_{i,j} |\langle e_j-f_j, e_i\rangle|^2$

$= \sum_{i,j} |\langle e_i-f_i, f_j\rangle|^2$

$\overset{\text{Bessel}}{\leq} \sum_i \|e_i-f_i\|^2$

由 $|\langle e_i-f_i, f_j\rangle|^2 \leq \|e_i-f_i\|^2$

且 $\sum_{i,j} |\langle e_i-f_i, f_j\rangle|^2 = \sum_i \|e_i-f_i\|^2$

$\Rightarrow \sum_j |\langle e_i-f_i, f_j\rangle|^2 = \|e_i-f_i\|^2$

$\Rightarrow$ LHS $= \sum_j \langle e_i-f_i, f_j\rangle\langle f_j, e_i-f_i\rangle$

$= \langle e_i, \sum_j \langle f_j, e_i-f_i\rangle f_j\rangle - \langle f_i, e_i-f_i\rangle$

RHS $= \langle e_i, e_i-f_i\rangle - \langle f_i, e_i-f_i\rangle$

$\Rightarrow \sum_j \langle f_j, e_i-f_i\rangle f_j = e_i - f_i$

$\Rightarrow e_i = f_i + \sum_j \langle f_j, e_i-f_i\rangle f_j$. □

2. X Banach，$f\in \mathcal{L}(X,\mathbb{R})$，$\forall x_0\in X$，$\forall \delta>0$

则 ① $\sup_{x\in B(x_0,\delta)} f(x) = f(x_0)+\delta\|f\|$

② $\inf_{x\in B(x_0,\delta)} f(x) = f(x_0)-\delta\|f\|$

[证明] $\sup_{x\in B(x_0,\delta)} f(x)-f(x_0) = \sup_{x\in B(x_0,\delta)} f(x-x_0)$

$= \sup_{z\in B(0,\delta)} f(z) = \delta\|f\|$.

② 由① $\Rightarrow \inf_{y\in B(0,\delta)} f(y) = -\delta\|f\|$ □

3. X Banach，$f\in X^*$，$d=\inf\{\|x\| : f(x)=1\}$

则 $\|f\| = \frac{1}{d}$.

[证明] $1=|f(x)|\leq\|f\|\,\|x\| \Rightarrow \|x\|\geq\frac{1}{\|f\|}$

$\Rightarrow d\geq\frac{1}{\|f\|} \Rightarrow \|f\|\geq\frac{1}{d}$

反之，$\|f\| = \sup_{x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|}$，$\forall \varepsilon>0$，

$\exists x_0\neq 0 \Rightarrow \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|}\geq\|f\|-\varepsilon$

即 $\left\|\frac{x_0}{f(x_0)}\right\| \leq \frac{1}{\|f\|-\varepsilon}$

且 $f\left(\frac{x_0}{f(x_0)}\right)=1 \Rightarrow d\leq\frac{1}{\|f\|-\varepsilon}$

$\Rightarrow d\leq\frac{1}{\|f\|} \Rightarrow \|f\|\leq\frac{1}{d}$. □

4. X Banach，$f\in X^*$，

证：$\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in X$，$f(x_0)=\|f\|$，$\|x_0\|<1+\varepsilon$.

[证明] 取 $\eta>0$ 足够小使 $\eta<\|f\|$

且 $\frac{|f(x_1)|}{\|x_1\|}>\|f\|-\eta>\frac{\|f\|}{1+\varepsilon}$

$\Leftrightarrow \left\|\frac{x_1}{f(x_1)}\right\|\,\|f\|<1+\varepsilon$

令 $x_0=\frac{x_1}{f(x_1)}\|f\|$ 即可. □

5. X,Y 为 Banach 空间，$T\in\mathcal{L}(X,Y)$，

若 $\exists$ 闭子空间 $M\subset Y$ 使 $\mathrm{Im}\,T\cap M=\{0\}$

且 $\mathrm{Im}\,T\oplus M$ 在 Y 中闭，证：$\mathrm{Im}\,T$ 在 Y 中闭.

[证明] 考虑 $T_1: X\times M\to Y$ 　 范数.

$(x,m)\mapsto Tx+m$

$\mathrm{Im}\,T_1$ 在 Y 中闭，则

$\inf_{\xi\in\ker T_1}\|(x,m)+\xi\|\leq c\|T_1(x,m)\|$

$=c\|Tx+m\|$.

由 $\ker T_1=\ker T\oplus\{0\}$，则

故 $\inf_{\xi\in\ker T}\|x+\xi\| = \inf_{\tilde\xi\in\ker T_1}\|(x,0)+\tilde\xi\|$

$\leq c\|Tx\|$.

$\Rightarrow \mathrm{Im}\,T$ 闭. □

6. H 为 Hilbert 空间，$A\in\mathscr{L}(H)$ 自伴.

若 $\operatorname{Im}A\subseteq H$ 稠密，则 ~~$Ax=y\ (y\in\operatorname{Im}A)$~~ A 为单射.

[证明] 由 $\operatorname{Im}A\subseteq H$ 稠密 $\Rightarrow(\operatorname{Im}A)^{\perp}=\{0\}$.

设 $Ax=0\Rightarrow\forall z,\ \langle Ax,z\rangle=0$

$\Rightarrow\forall z,\ \langle x,Az\rangle=0$. 由 $(\operatorname{Im}A)^{\perp}=\{0\}$

$\Rightarrow x=0\Rightarrow$ 单. □

7. X,Y Banach，~~$T\in\mathscr{L}(X,Y)$~~. $T:X\to Y$ 不一定有界，若 $\forall g\in Y^*$，$g\circ T$ 有界 $\Rightarrow T$ 有界.

[证明] $\begin{cases}x_n\to x\\Tx_n\to y\end{cases}$ 由 $g\circ T$ 有界 ~~$\Rightarrow$ [illegible]~~
且 g 有界

$\Rightarrow g\circ T(x_n)\to g\circ T(x)$

且 $g(Tx_n)\to g(y)$

$\Rightarrow g(T(x))=g(y),\ \forall g\in Y^*$

$\Rightarrow \iota(Tx)(g)=\iota(y)(g),\ \forall g\in Y^*$

$\Rightarrow \iota(Tx)=\iota(y)$, Hahn-Banach

$\Rightarrow Tx=y$，闭图像 $\Rightarrow\checkmark$ □

8. X 自反，M 非空闭凸集，则

存在 $\exists x_0\in M$，$\|x_0\|=\inf\limits_{y\in M}\|y\|$.

[证明] 设 $d=\inf\limits_{y\in M}\|y\|$. 取 $\{x_n\}\subseteq M$

使 $d\le\|x_n\|\le d+\frac{1}{n}$.

知 $x_{n_k}\xrightarrow{w}x_0$，且 H-B 推论：

$\exists f\in X^*$，$\|f\|=1$，$f(x_0)=\|x_0\|\ge d$

$\|x_0\|=f(x_0)=\lim\limits_k f(x_{n_k})\le\lim\limits_k\|f\|\|x_{n_k}\|=d$

$\Rightarrow\|x_0\|=d$. □

9. ℓ^2 上右推 $=\begin{cases}C\sigma(A)=S^1\\R\sigma(A)=\operatorname{int}(B_1)\\P\sigma(A)=\phi\end{cases}$

左推 $=\begin{cases}C\sigma(A)=S^1\\R\sigma(A)=\phi\\P\sigma(A)=\operatorname{int}(B_1)\end{cases}$

10. $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 可测，$K(x,y)\in L^2(\Omega\times\Omega)$.

记 $A:u\mapsto\int_\Omega K(x,y)u(y)\,dy$

为 $L^2(\Omega)$ 上紧算子

[证明] 由 $L^2(\Omega)$ 自反，只需证 A 全连续.

令 $u_n\xrightarrow{w}0$，要证 $Au_n\to0$.

~~[illegible] $\|Au_n\|^2$~~ 即证 $\|Au_n\|\to0$

由 $u_n\xrightarrow{w}0\Rightarrow\int_\Omega K(x,y)u_n(y)\,dy\to0$ a.e.

$\Rightarrow\|Au_n\|^2=\int_\Omega\left|\int_\Omega K u_n dy\right|^2dx\to0\ \checkmark$ □

11. $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 有界闭，$K\in C(\Omega\times\Omega)$.

$T:u\mapsto\int_\Omega K(x,y)u(y)\,dy$，

记：T 为 $C(\Omega)$ 上紧算子

[证明] 要证 $\overline{T(B_1)}$ 紧. 令 $M=\max\limits_{x,y\in\Omega}|K(x,y)|$

① $\Rightarrow\|Tu\|\le M\|u\|\operatorname{mes}(\Omega)$

由 K 一致连续 $\Rightarrow|K(x,y)-K(x',y)|<\varepsilon$

② $\Rightarrow|Tu(x)-Tu(x')|$

$\le\int_\Omega|K(x,y)-K(x',y)||u(y)|\,dy$

$\le\varepsilon\|u\|\operatorname{mes}(\Omega)$

由 A-A $\Rightarrow\checkmark$ □