泰山学堂 2020 级数学取向高等代数作业

Mar 2021 - Jul 2021

前言:

1. 作业的题目来源：熊老师的半本高代，丘维声，李尚志，北大高代以及各类竞赛题（大学生数学竞赛，丘赛等）

2. 来源于熊老师半本高代的习题去掉了原文中的提示，希望提高大家独立思考的能力。如果对于某些习题需要提示可以参考半本高代习题集。

下载地址：https://www.cnblogs.com/XiongRuiMath/p/10752698.html

3. 高等代数中有趣的题当然不止这些，因此每周还会有一些补充题不作为作业要求，大家可以一起讨论

4. 但愿你能享受这些问题

1 第一周 (1 Mar 2021 - 7 Mar 2021)

请**务必**在**纸**或**本子**上完成作业，并写上**姓名**和**学号**，必要时写上**页码**。本次作业的提交时间和地点为 **3 月 8 日的课堂**上。

Exercise 1 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间，域 F 包含域 E, F 可看作域 E 上的线性空间, 设 $dim_E F = m$.
(1) 证明：V 可看作 E 上的线性空间.
(2) 求 V 作为域 E 上线性空间的维数.

Exercise 2(子空间回避)
对于 Q 上的线性空间 V,$U_1, \ldots, U_n \subsetneq V$ 是真子空间,那么 $U_1 \cup \cdots \cup U_n \subsetneq V$.
第一个证明来自归纳法.
（1）首先，证明 $n = 2$ 的情况.
（2）其次,根据归纳法,假设任何 U_i,U_i 不包含在 $U_1 \cup \cdots \cup \widehat{U_i} \cup \cdots \cup U_n$ 之中,其中 $\widehat{*}$ 表示跳过,于是可挑选 x_i 使得 $x_i \in U_j \iff i = j$ 注意到 $|\{x_n + \lambda x_i : \lambda \in \mathbb{Q}\}| = \infty$, 那么根据鸽笼原理，对某个 $U_j, x_n + \lambda x_i, x_n + \lambda' x_i \in U_j$ 对 $\lambda \neq \lambda'$, 于是 $x_i \in U_j$, 从而 $i = j$, 进而 $x_n \in U_i$, 产生矛盾. 将上述证明更完整的写下来.
（3）第二个证明基于范德蒙德行列式. 首先，选择 V 的一组基 $e_1, \ldots, e_n$, 考虑 $x_\lambda = e_1 + \lambda e_2 + \cdots + \lambda^{n-1} e_n$. 证明任意 n 个 $\{x_\lambda : \lambda \in \mathbb{Q}\}$ 中元素形成了 V 的一组基.
（4）证明 U_i 只能含有 $\{x_\lambda : \lambda \in \mathbb{Q}\}$ 有限的成员. 证明完毕.
第三个证明基于一些代数几何的想法
（5）证明假设 U_i 余维数都是 1 并不损耗一般性.
（6）通过假设 $V = Q^n$, 证明 U_i 是某个线性多项式的零点，$U_1 \cup \cdots \cup U_n$ 则是他们乘积的零点.
（7）完成证明.

Exercise 3 证明 F^n 的任意子空间 U 是 F 上某个齐次线性方程组的解空间

Exercise 4 设 A, B 分别是域 F 上的 $s \times n, m \times n$ 矩阵. 证明 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 的解集相同的充分必要条件是 A 的行向量组和 B 的行向量组等价

Exercise 5 令 $[a, b]$ 是实数上的闭区间，令 $C[a, b]$ 是所有 $[a, b] \to R$ 的连续函数.
证明 $f_1, \ldots, f_n \in C[a, b]$ 是线性无关的当且仅当 $\exists x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$, 使得 $det(f_i(x_j))_{ij} \neq 0$

Exercise 6 V 是域 F 上的 n 维线性空间，$W \subsetneqq V, |F| = \infty$，那么 W 在 V 中的补空间有无数个。

Exercise 7 任意域 F 上的线性空间都有一组基 (提示：Zorn's lemma)
更多有关 Zorn's lemma 的内容建议参考熊老师数学入门相关章节。下载地址：https://www.cnblogs.com/XiongRuiMath/articles/8992691.html

Exercise 8 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，A 是一 $n \times s$ 矩阵，

$$(\beta_1, \cdots, \beta_s) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s)A$$

证明：$\langle \beta, \cdots, \beta_s \rangle$ 的维数等于 $rank(A)$.

补充题（可以不交）在 $M_n(R)$ 中是否有非平凡的子空间 U 使得任何 U 中的成员都不可逆？他们的维数最大为多少？

2 第二周 (8 Mar 2021 - 14 Mar 2021)

请**务必**在**纸**或**本子**上完成作业，并写上**姓名**和**学号**，必要时写上**页码**。本次作业的提交时间和地点为 **3 月 15 日的课堂**上。

Exercise 1 对于一个 R-线性空间 V 和一个线性变换 $P : V \to V$. 如果 $P^2 = P$, 我们说 P 是一个投影.

（1）证明 $V = kerP \oplus imP$, 并且 V 在 $\mathrm{im}P$ 上的作用是恒等映射，给出这一类变换的几何解释.

（2）令 $P' = I-P$, 证明 $(P')^2 = P', PP' = P' = 0, kerP = imP', ker' = imP$

（3）证明分解 $V = V_1 \oplus V_2$ 和 V 上的投影 P 通过 $V_1 = kerP$ $V_2 = imP$ 一一对应

Exercise 2 对于一个 R-线性空间 V 和一个线性变换 $S : V \to V$. 如果 $S^2 = I$, 我们说 S 是一个反射

（1）令 $FixS = V \in V : Sv = v$. 证明 $V = FixS \oplus Fix(-S)$, 给这类变换一个几何解释.

（2）如果 $dimFix(-S) = 1$. 那么我们称 S 是一个单反射. 证明每个反射是一些单反射的乘积. 我们采取空乘即恒等映射的约定.

（3）如果 $V/0$ 的有限子集 R 张成了 V，并固定一个 $v \in R$. 证明至多只有一个单反射使得 $S(R) \subset R, Sv = -v$.

Exercise 3 将 $M_n(R)$ 视为一个 R-线性空间，其中可逆矩阵的子集记为 $GL_n(R)$，如果我们将 $M_n(R)$ 视作 R^{n*n}, 那么我们可以讨论上面的开集和闭集.

（1）证明 $GL_n(R)$ 是开集.

（2）证明 $GL_n(R)$ 是稠密的，即任何矩阵都是某个可逆矩阵列的极限.

Exercise 4(Noether 性) 设 $\mathbf{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 的线性变换，证明存在 $m \in \mathbb{N}^+$:

$$\mathbf{A}^m V = \mathbf{A}^{m+k} V \qquad k = 1, 2, 3 \cdots$$

PS: 此题方法应当不止一种（当然，你只需要给出任意一种正确的解答即可）

我们来看一看可交换的矩阵序列有哪些好的性质：

Exercise 5(公共特征向量) V 是复数域上的 n 维线性空间，$\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_s$ 是 V 上的线性变换，他们两两可交换：（1）我们先考虑 $s = 2$ 的情形，证明它们至少有一个公共特征向量.

（2）考虑一般的情形，它们至少有一个公共的特征向量。

Exercise 6(同时上三角化) $A_1, \cdots, A_s$ 是 n 级复矩阵，他们两两可交换：（1）我们先考虑 $s = 2$ 的情形，证明它们可以同时上三角化，即存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP, P^{-1}BP$ 为上三角矩阵.

（2）考虑一般的情形，证明它们可以同时上三角化。

Exercise 7(同时对角化) 如果域 F 上的矩阵 A, B 都可以对角化，且 $AB = BA$, 那么 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 可以同时对角化

关于特征值和对角化，有一些基本但重要的性质：

Exercise 8 （1）举一个不可对角化的矩阵的例子，并**牢记**它！

（2）令 A 带重数的特征值是 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$，证明 $detA = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

（3）如果 λ 是 A 的特征值，证明 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值，其中 f 是任意多项式.

3 第三周 (15 Mar 2021 - 21 Mar 2021)

我们本周的专题是迹（Trace）/Lie 代数前瞻/再谈哈密顿凯莱定理。由于各种原因，高代中有趣的习题可能作为很多个小专题出现会比较好（也许你已经发现上周和对角化/三角化关系比较大）

请**务必**在**纸**或**本子**上完成作业，并写上**姓名**和**学号**，必要时写上**页码**。本次作业的提交时间和地点为 **3 月 22 日的课堂**上。

Exercise 1 对于一个 $n \times n$ 矩阵 A, 它的迹被定义为主对角线上的元素之和，即，对 $A = (a_{ij})$, $tr(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$.
（1）证明有如下基本性质

$$tr(A + \lambda B) = trA + \lambda trB, tr(AB) = tr(BA)$$

并利用他们来证明 $tr(PAP^{-1}) = tr(A)$, 所以迹在基变换下不变，故可对有限维线性空间的线性变换定义迹.
（2）证明 $tr(ABC) = tr(ACB)$ 一般不成立.
（3）证明对 n 阶方阵 A, 其特征多项式为

$$det(\lambda I - A) = \lambda^n + (-1)^{n-1}(trA)\lambda^{n-1} + \cdots + (...)\lambda + detA$$

所以，trA 是特征值的和（按重数计算）
（4）证明 Newton 恒等式
（5）证明一个方阵 A 幂零当且仅当 $trA^k = 0$ 对任意正整数 k. **这是一个有用的结论，希望你记住 ta :）**

Exercise 2 （1）设 V 是复数域上的 n 维线性空间,V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 有 n 个不同的特征值, 求 $\mathcal{A}$ 的所有不变子空间, 并求出不变子空间的个数
（2）设 V 是实数域上的 n 维线性空间, 证明 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 必有一维或二维不变子空间

Exercise 3 给两个有限维线性变换 A, B, 如果他们的李括号 $[A, B] = AB - BA = \lambda B.$, 记 $V_\lambda(A) = \{v : Av = \lambda v\}$ 是特征子空间.

（1）证明 $v \in V_\mu(A) \Rightarrow Bv \in V_{\mu+\lambda}(A)$.

（2）下面，假设基域是 $\mathbb{C}$. 如果 $\lambda = 0$, 那么 A, B 有公共的特征向量.

（3）如果 $\lambda \neq 0$, 证明 A, B 有公共的特征向量.

（4）证明 $v \in V_\mu(B) \Rightarrow Av \in V_\mu(B)$.（请勿沉湎于此）

Exercise 4 （1）证明 $tr[X, Y] = 0$ 对任何方阵 X, Y.

（2）在 $[A, B] = \lambda A$, 我们可以得到 A 是幂零方阵，其中 $\lambda \neq 0$

（3）设 $[A, B] = C, [A, C] = 0$, 那么 $C^n = 0$

Exercise 5 设 $V = \mathbb{F}^{n\times n}$, 定义线性变换 $ad_A(B) = [A, B]$, 证明：ad_A 可对角化当且仅当 A 可对角化

Exercise 6（1）设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 分别是数域 K 上 n, m 级矩阵. 证明如果 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 有 r 个两两不等的公共特征值,$0 < r \leq min\{n, m\}$, 那么矩阵方程 $\mathbf{AX} - \mathbf{XB} = \mathbf{0}$ 有秩为 r 的矩阵解

（2）设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 分别是复数域上 n, m 级矩阵. 证明如果矩阵方程 $\mathbf{AX} - \mathbf{XB} = \mathbf{0}$ 有秩为 r 的矩阵解,$0 < r \leq min\{n, m\}$, 那么 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 至少有 r 个公共的特征值 (重根按重数计算)

Exercise 7 思考：下面的哈密顿-凯莱定理的证明是合理的吗？请简述原因

证明：令 f 是特征多项式. 注意到 $f(\lambda) = det(\lambda I - A)$, 带入 $\lambda = A$ 得 $f(A) = det(AI - A) = det(O) = 0.$

想一想课上/教材上是怎么证的，要有思路不用写出来

Fuxercise 8(此题愿你量力而为)

在这个问题中，我们得到一些可对角矩阵的解析信息. 我们将在本问题下视 $M_n(\mathbb{C})$ 是一个 n^2 维的 $\mathbb{C}$-线性空间.

（1）给一个多项式 $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. 证明如果在某个 C^n 的开集上 $f = 0$（作为函数）, 那么 $f = 0$.

（2）给一个非零 n 元复系数多项式，证明子集 $\{(x_1, \ldots, x_n) \in C^n : f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0\}$ 是稠密的.

（3）利用特征多项式没有重根则可以对角化的事实来证明可对角矩阵在 $M_n(C)$ 中稠密.

（4）利用上述事实给出 $\mathbb{C}$ 上哈密顿凯莱定理的证明.

（5）请先给出整环上的证明，如果你熟知 **Ring** 的 *universal object* , 请证明一般非整环时的情形

（6）逆定理：给一个定义在复系数的 n 阶方阵的复值函数 f，设其可表为方阵系数的多项式，如果对任何 n 阶方阵 A，$f(kI - A)$ 看成 k 的多项式再用 A 代替 k 最后结果总是 0 那么存在函数 g，使得 $f(A) = det(A)g(A)$

所以某种意义上，这个定理是最佳的!

4 第四周 (22 Mar 2021 - 28 Mar 2021)

我们本周的专题是 Jordan 标准型，在完成作业之前请认真复习之前所学并阅读《Jordan 标准型的几种证明》，本周共有六道作业。。

请**务必**在**纸**或**本子**上完成作业，并写上**姓名**和**学号**，必要时写上**页码**。本次作业的提交时间和地点为 **4 月 9 日的课堂**上。

Exercise 1 令 $\mathcal{B}$ 是一个和所有 $\mathcal{A}$ 可交换的线性变换可交换的线性变换。
（1）我们首先证明较弱的版本，

$$\forall v \in V, \exists f \in \mathbb{C}[X], s.t\ f(\mathcal{A})v = \mathcal{B}v$$

这等价于任何 $\mathcal{A}$-不变子空间也是 $\mathcal{B}$-不变的。
（2）现在通过考虑 $(V^\dagger, \mathcal{A}^\dagger)$ 其中

$$V^{\oplus n} \qquad \mathcal{A}^\dagger : (v_1, \cdots, v_n) \mapsto (\mathcal{A}v_1, \cdots, \mathcal{A}v_n)$$

证明结论。
上述证明是 *Jacobson* 和 *Chevally* 稠密性定理 *Bourbaki* 证明的推广。

Exercise 2 证明任何与任何与 $\mathcal{A}$ 可交换的线性变换可交换的线性变换都可以表示成 $\mathcal{A}$ 的多项式

Exercise 3 在本文题中，我们要对复矩阵定义指数映射. 一个著名的定理是说欧氏空间的不同的范数是等价的，于是我们不失一般性使用

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}, A = (a_{ij})$$

（1）证明 $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, 于是 $\|A^n\| \leq \|A\|^n$.
（2）证明对每个复矩阵 A,$\{\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\}_{n=1}^{\infty}$ 是柯西列.

（3）现在我们定义 $e^A = expA = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}$
证明如下基本性质

$$e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}, AB = BA \Rightarrow e^Ae^B = e^{A+B}, e^{\lambda I} = e^{\lambda}I$$

（4）计算 $e^{J(\lambda)}$，其中 $J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$

（5）证明 $dete^A = e^{trA}$

（6）证明 e^Ae^B 一般不等于 e^Be^A.

（7）证明 $X(t) = exp(tA)$ 是如下微分方程的解

$$\frac{dX(t)}{dt} = X(t)A$$

（8）假设 $X = (x_{ij})$ 以及 $e^X = (y_{ij})$, 通过视 y_{ij} 是 x_{ij}d 的函数证明

$$\frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{ij}}|_{X=0} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & (i,j) = (k,h) \\ 0 & (i,j) \neq (k,h) \end{array} \right\}$$

（9）证明 $e^{tX}e^{tY} = e^{(t(X+Y)+\frac{t^2}{2}(XY-YX)+o(t^2))}$

Exercise 4 令 $\|\cdot\|$ 是一个矩阵的范数，证明

$$\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \max\{|\lambda|\}$$

其中 λ 是 A 的特征值.

这一公式称为“谱半径公式”，这对 Banach 空间也成立.

5 第五周 (29 Mar 2021 - 4 Apr 2021)

我们本周的专题是内积空间。

请**务必**在**纸**或**本子**上完成作业，并写上**姓名**和**学号**，必要时写上**页码**。本次作业的提交时间和地点为 **4 月 9 日的课堂**上。

Exercise 1 我们已经学习了欧氏空间的定义，我们给出一些扩展的定义。对于一般的域 $\mathbb{K}$ 上的内积空间 V 需要其满足共轭双线性，共轭对称性和正定性，即以下 4 条性质：

$$(\cdot,\cdot): V \times V \to \mathbb{K}$$
$$(x, a_1y_1 + a_2y_2) = \overline{a_1}(x, y_1) + \overline{a_2}(x, y_2)$$
$$(a_1x_1 + a_2x_2, y) = a_1(x_1, y) + a_2(x_2, y)$$

定义完备的内积空间是 **Hilbert 空间** (完备指 Cauthy 列皆收敛)。下面我们来验证几个重要的例子：

(1) 在 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$ 中分别定义内积：

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i (\forall x, y \in \mathbb{R}^n)$$
$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i} (\forall x, y \in \mathbb{C}^n)$$

其中 $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$

(2)l^2 空间是由满足以下条件的无穷序列 $(x_1. \cdots, x_n, \cdots)$ 给出：

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$$

定义内积

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\overline{y_i}$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots),y=(y_1,\cdots,y_n,\cdots)\in l^2$
验证以上空间皆为 Hilbert 空间。

Exercise 2 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 是欧氏空间 $E(\mathbb{R})$ 中一组两两正交的单位向量，生成子空间 W，α 是欧氏空间 $E(\mathbb{R})$ 中的任意向量。试求 $x_1,\cdots,x_k\in\mathbb{R}$ 使得 $\delta=\alpha-\sum_{i=1}^k x_i\alpha_i$ 的长度 $|\delta|$ 的最小值。

Exercise 3(Bessel 不等式) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 是欧氏空间 $E(\mathbb{R})E_n(\mathbb{R})$ 中一组两两正交的单位向量，α 是欧氏空间 $E(\mathbb{R})$ 中的任意向量，证明：

$$\sum_{i=1}^k(\alpha,\alpha_i)^2\leq|\alpha|^2$$

且 $\beta=\alpha-\sum_{i=1}^k(\alpha,\alpha_i)\alpha_i$ 都正交。

Exercise 4 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维欧氏空间 $E_n(\mathbb{R})$ 的一组向量。证明下面的命题等价：
(1)$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是欧氏空间 $E_n(\mathbb{R})$ 的标准正交基；
(2)(Parseval 等式) 对任意 $\alpha,\beta\in E_n(\mathbb{R}),(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^n(\alpha,\alpha_i)(\beta,\alpha_i)$
(3) 对任意 $\alpha\in E_n(\mathbb{R})$, $|\alpha|^2=\sum_{i=1}^n(\alpha,\alpha_i)^2$

Exercise 5 (1) 对于任何复方阵 A，证明存在一个酉矩阵 U 使得 UAU^{-1} 是上三角矩阵
(2) 对任何所有特征值都是实数的方阵 A，证明存在一个正交阵 U 使得 UAU^{-1} 是上三角矩阵

Exercise 6 (1) 证明

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})=span\{AB-BA:A,B\in M_n(\mathbb{R})\}$$

具有维数 n^2-1，且一组基可取作

$$\{E_{11}-E_{ii}\}_{i=2}^n\sqcup\{E_{ij}\}_{i\neq j}$$

并且 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})=\{A\in M_n(\mathbb{R}):tr(A)=0\}$

(2) 对于一个矩阵 $A\in M_n(\mathbb{Q})$，我们要证明如果 $tr(A)=0$，那么 A 相似于某个对角元全是 0 的矩阵。

(i) 对对角阵证明结论

(ii) 用有理标准型来得到结果

(iii) 结论对 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 还对吗？

(3) 证明第一问中的“$span$”可以删掉 (多神奇啊！)。具体来说对任意矩阵 $X\in M_n(\mathbb{R})$ 使得 $tr(X)=0$，那么存在 $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ 使得 $AB-BA=X$。

6 高等代数 2 期中考试

Problem 1(线性空间) 本学期我们首先学习了线性空间，这是线性代数最重要的“舞台”。让我们首先来考察一个常见的线性空间：域 F 上的一元多项式环。

(1) 验证 $F[x]_n$(次数小于 n 的一元多项式) 在加法和数乘下构成线性空间.

(2) 分别验证

$$1,x-a,(x-a)^2,\cdots(x-a)^{n-1}$$

$$\Pi_{j\neq i}(x-a_j)\qquad i=1,2......n$$

构成上述线性空间的基.

(3) 求出第一组基到第二组基的过渡矩阵.

Problem 2(线性映射与对角化) 接下来大家学习了线性映射，可以理解为“舞台”上的“装饰”。为了得到线性映射在某组基下的简单形式（如：对角化，三角化），我们有了特征多项式和特征值的概念, 并将空间进行分解。考察域 F 上线性空间 V 和其上的线性变换 $\mathcal{A}:V\to V$。

(1) 令 $f,g\in F[x]$ 且互质，证明 $kerf(\mathcal{A})\cap kerg(\mathcal{A})=0$.

(2) 如果 $h=fg$ 使得 $h(\mathcal{A})=\mathcal{O}$，证明 $V=kerf(\mathcal{A})\oplus kerg(\mathcal{A})$.

(3) 假设 $\mathcal{A}$ 的特征多项式是 $f = f_1^{n_1} \cdots f_s^{n_s}$，其中 $f_1, \cdots, f_s$ 两两互质，证明 $V = kerf_1^{n_1}(\mathcal{A}) \oplus \cdots \oplus kerf_s^{n_s}(\mathcal{A})$

(4) 利用上述结论证明如果存在某个无重根多项式 f 使得 $f(\mathcal{A}) = 0$ 那么 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{C}$ 上可对角化，并且给出一个例子。

(5) 上述命题的逆命题对吗？

(6) 对于两两交换的有限复方阵集合，证明它们可以同时对角化.

(7) 对于两两交换的有限复方阵集合，证明它们可以同时上三角化.

Problem 3($Jordan$ 标准型) 之后我们来到 $Jordan$ 标准型，这里我们学习了一整套理论从不同的路径得到最终的结果。首先 $Jordan$ 标准型本身还是很有用的，我们先来看一个相关的计算，这个计算在 ODE 中会有应用。(其中指数矩阵的定义和基本性质已经在作业中给出)

(1) 利用 $Jordan$ 标准型计算 $e^{x\mathbf{A}}$，其中 $\mathbf{A}$ 为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

下面我们来证明一个结论：对于有限维复线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$，我们要证明存在 $v \in V$ 使得 $\{f(\mathcal{A})v : f \in C[x]\} = V$ 当且仅当 $\mathcal{A}$ 的每个特征值的 $Jordan$ 块只有一块。

(2) 如果有不变子空间 W，证明存在 $w \in W$ 使得 $\{f(\mathcal{A})w : f \in C[x]\} = W$[Hint: 带余除法].

(3) 证明结论.

Problem 4(内积空间) 对于 n 维内积空间 V，一组向量 $e_1, \cdots, e_r$，如果它们两两内积取负，求 r 的最大值。

7 第七周 (12 Apr 2021 - 18 Apr 2021)

我们本周的**主题**是**分解**，尝试挑战更多的分解吧！(**除了前两个选六个即可**)

请**务必**在**纸**或**本子**上完成作业，并写上**姓名**和**学号**，必要时写上**页码**。本次作业的提交时间和地点为 **4 月 23 日的课堂**上。

Exercise 1(QR/L 分解) 将可逆实 (复) 矩阵 A 分解为 $A = QR(L)$ 其中 Q 是正交 (酉) 矩阵，$R(L)$ 是上 (下) 三角矩阵。

Exercise 2(J-C 分解) 复矩阵 $A = B + C$ 其中 B 半单 (可对角化)，C 幂零，且它们可交换。

Exercise 3(单秩分解) 秩为 r 的矩阵可以写成 r 个秩为 1 的矩阵的和。

Exercise 4(满秩分解) 秩 r 的矩阵 A 可以写成列满秩和行满秩矩阵之积。

Exercise 5(CP 分解) 方阵 $A = PC$，其中 P 可逆，C 幂等，反过来也可以 (P 幂等，C 可逆)。

Exercise 6(对称分解) $A = P + Q$ 其中 P 对称，Q 反称，且这种分解是唯一的。

Exercise 7(Voss 分解) 方阵 $A = BC$，其中 B, C 对称，其一可逆。

下题算两道题：

Exercise 8(LU/LDU/PLU 分解) 对于顺序主子式皆不为 0 的可逆矩阵 A：

(1)$A = LU$，其中 L 是对角线为 1 的下三角矩阵，U 是上三角矩阵。

(2)$A = LDU$，其中 L 是对角线为 1 的下三角矩阵，D 是对角矩阵，U 是上三角矩阵。
(3) 对可逆矩阵 A 有 $PA = LU$，其中 P 是排列矩阵 (每行每列只有一个 1 其余为 0)L 是对角线为 1 的下三角矩阵，U 是上三角矩阵。

Exercise 9(Schur 分解) 方阵 $A = U^{-1}RU$，其中 U 为酉矩阵，R 为上三角矩阵。

Exercise 10(SVD 分解、奇异值分解) (1) 方阵 $A = USV$，其中 U 和 V 是正交阵，S 是对角阵，对角线上的元素称为矩阵的奇异值，奇异值指的是 A^TA 的特征值的算术平方根。
(2) 方阵 $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \alpha_i \beta_i'$，其中 α_i 两两正交，β_i 两两正交，σ_i 是矩阵的奇异值

Exercise 11(极分解) 方阵 $A = RT$，其中 R 是半正定对称方阵，T 是正交阵，反过来也可以 (此处语意同第 5 题)。

Exercise 12(Witt 扩张) 若 $A^TA = B^TB$，则 $A = TB$，其中 T 是正交阵。

Exercise 13(Cholesky 分解) 正定对称阵 $A = P^TP$, 其中 P 是上三角矩阵。

Exercise 14 若 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，求证：$|A| \leq \Pi_{j=1}^{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2}$

8 第八周 (19 Apr 2021 - 25 Apr 2021)

请**务必**在**纸**或**本子**上完成作业，并写上**姓名**和**学号**，必要时写上**页码**。本次作业的提交时间和地点为 **4 月 30 日的课堂**上。

本周开始作业要求有所区别，请分别从第一组和第二组中**任选三道题**。其中第一组来自课后作业，第二组可能来自市面上常见高代课本中的好题或是各类竞赛 (大学生数学竞赛，丘赛等)。相比于期中之前作业的总量和难度都有所降低 (也许来自题目通顺程度的提高)，但更加自由。本周除去六道题之外还有课上守哥给的必做题一共 7 道。

课上的问题 (此题必做)：对长正合列

$$0 \to V_1 \to \cdots \to V_n \to 0$$

证明奇数线性空间的维数和等于偶数线性空间的维数和。

第一组：(课后习题)

Exercise 1 设长正合列

$$0 \to V \to W \to V \to W \to 0$$

证明 $dimV = dimW$

Exercise 2-Exercise 6 黎景辉《高等线性代数学》P30-32:3,7,9,10,14 注意题中**可能**某些**下标**或是**符号**有错，自行修改即可。

第二组：(初等线性代数学复习)

Exercise 1 请重新完成期中考试第二题，并想想没有拿到 (满) 分的原因。

Exercise 2 请重新完成期中考试第三题 (第一问不用做)。

Exercise 3 Let V be a finite dimentional complex vector space.Let A, B be the two linear endomorphisms of V satisfying $AB - BA = B$.Prove that there is a common eigenvector for A and B.(此题如果学过些 Lie 代数，也许会容易亿些)

Exercise 4 Let V be a finite-dimentional vector space over $\mathbb{R}$ and $T : V \to V$ be a linear transformation such that

(1)the minimal polynomial of T is irreducible.

(2)there exists a vector $v \in V$ such that $\{T^i v | i \geq 0\}$ spans V.

Show that V contains no non-trivial proper T-invariant subspace.

Exercise 5 A, B 相似等价于

$$\begin{pmatrix} A & \\ & A \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} B & \\ & B \end{pmatrix}$$

相似。

Exercise 6 (1)Let A and B be two real $n \times n$ matrices such that $AB = BA$. Show that $det(A^2 + B^2) \geq 0$.

(2) Generalize this to the case of k pairwise commuting matrices.

9 第九周 (26 Apr 2021 - 2 May 2021)

第一组：(课后习题)

Exercise 1-Exercise 6 黎景辉《高等线性代数学》P30-32:8,13,15,16,17,18

第二组：(初等线性代数学复习)

Exercise 1 域 F 上的线性空间 V 任意子空间都有补空间。

Exercise 2 设域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 在 V 的一组基下的矩阵 $\mathbf{A}$ 为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

其中多项式 $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ 在域 F 上不可约, 证明 $\mathcal{A}$ 没有非平凡的子空间。

Exercise 3 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间,V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 在 V 的一组基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 下的矩阵 $\mathbf{A}$ 为

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

求 $\mathcal{A}$ 的所有不变子空间。

Exercise 4 证明 F 上的 n 阶矩阵 A 和 A^T 相似。

Exercise 5 证明任意可逆复矩阵都有平方根。

Exercise 6 设 $\mathcal{A}$ 是 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换. 证明若 $\mathcal{A}$ 有若尔当标准型等价于对 $\mathcal{A}$ 的任意非平凡不变子空间 W, 都有 $\mathcal{A}|W$ 有若尔当标准型且 $\mathcal{A}$ 在 V/W 上诱导的线性变换 $\tilde{\mathcal{A}}$ 也有若尔当标准型

10 第十一周 (8 May 2021 - 14 May 2021)

请**务必**在**纸**或**本子**上完成作业，并写上**姓名**和**学号**，必要时写上**页码**。本次作业的提交时间和地点为 **5 月 7 日的课堂**上。

第一组：(课后习题)

Exercise 1-Exercise 6 黎景辉《高等线性代数学》P47-48 2,6,7,8,9,10

第二组：(初等线性代数学复习)

Exercise 1 设 V 是复线性空间,$\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是 V 上的线性变换, 证明 $\mathcal{A}$ 的若尔当标准型中若尔当块的数目等于 $\mathcal{A}$ 的线性无关的特征向量的最大数目。

Exercise 2 设 $\mathbf{S}$ 是非零的反对称矩阵, 证明：

(1) $|\mathbf{E}+\mathbf{S}|>1$

(2) 设 $\mathbf{A}$ 是正定矩阵, 则 $|\mathbf{A}+\mathbf{S}|>|\mathbf{A}|$

Exercise 3 证明：设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 均为 $n\times n$ 实对称矩阵, 且可以交换, 则它们有公共的特征向量作为 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基

Exercise 4 设数域 P 上 $n\times n$ 矩阵 $\mathbf{F}$ 的特征多项式为 $f(x)$, 并设 $g(x)=\prod\limits_{i=1}^{m}(x-a_i)$. 证明:

(1)$|g(\mathbf{F})|=(-1)^{mn}\prod\limits_{i=1}^{m}f(a_i)$;

(2) 对数域 P 次数 ≥ 1 的多项式 $G(x)$, 有 $(G(x),f(x))=1$ 当且仅当 $|G(\mathbf{F})|\neq 0$.

Exercise 5 证明实反称矩阵正交相似于准对角矩阵

$$\begin{pmatrix}
0 &&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&& \\
&& 0 &&&&&& \\
&&& 0 & b_1 &&&& \\
&&& -b_1 & 0 &&&& \\
&&&&& \ddots &&& \\
&&&&&& 0 & b_s \\
&&&&&& -b_1 & 0
\end{pmatrix}$$

其中 $b_i(i=1,2,\ldots,s)$ 是实数

Exercise 6 设 $P[x]$ 中多项式 $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_s(x)(s \geq 2)$ 的次数分别为 $n_1, n_2, \ldots, n_s$. 证明若 $n_1+n_2+\cdots+n_s < \frac{s(s-1)}{2}$ 那么 $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_s(x)(s \geq 2)$ 在 $P[x]$ 中线性相关

11 第十二周 (15 May 2021 - 21 May 2021)

请**务必**在**纸**或**本子**上完成作业，并写上**姓名**和**学号**，必要时写上**页码**。本次作业的提交时间和地点为 **5 月 28 日的课堂**上。

第一组：(课后习题)

Exercise 1-Exercise 6 黎景辉《高等线性代数学》P48 11，12，13，14，15 P77 3

第二组：(初等线性代数学复习)

Exercise 1 设 f 是域 F 上的 n 维线性空间 V 上的一个双线性函数. 证明：

f 是非退化的当且仅当 $L_f(R_f)$ 是线性空间 V 到 V^* 的同构映射. 其中 $L_f(\alpha) = \alpha_L, R_f(\beta) = \beta_R.\alpha_L(\beta) = f(\alpha, \beta), \beta_R(\alpha) = f(\alpha, \beta)$.

Exercise 2 f 是域 F 上线性空间 V 对称或反对称的双线性函数,W 是 V 的一个子空间, 令 $W^\perp = \{\alpha \in V | f(\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in W\}$, 称 $W^\perp$ 是 W 关于 f 的正交补. 当 f 非退化时, 证明:

(1)$dimW + dimW^\perp = dimV$

(2)$(W^\perp)^\perp = W$

Exercise 3 设 V 是特征不为 2 的域 F 上的线性空间,f 是对称或反对称的双线性函数. 设 W 是 V 的一个有限维非平凡子空间. 证明 $V = W \oplus W^\perp$ 的充分必要条件是 $f|W$ 是非退化的

Exercise 4 证明特征不为 2 的域 F 上的两个 n 阶反对称矩阵合同的充

要条件是它们有相同的秩.

12　第十二周 (22 May 2021 - 28 May 2021)

请**务必**在**纸**或**本子**上完成作业，并写上**姓名**和**学号**，必要时写上**页码**。本次作业的提交时间和地点为 **6 月 4 日的课堂**上。

第一组：(课后习题)

Exercise 1-Exercise 6　黎景辉《高等线性代数学》P78 9，11，13，14，16，17

第二组：(初等线性代数学复习)

设 V 是域 F 上的一个线性空间,V 到 F 的映射 q 称为 V 上的一个二次函数, 如果存在 V 上的一个对称双线性函数 f 使得 $q(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$

Exercise 1　设 V 是特征不为 2 的域 F 上的线性空间,q 是 V 上的一个二次函数, 则存在 V 上的唯一的对称双线性函数 f 使得 $q(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$.

Exercise 2　设 V 是实数于上的 n 维线性空间,q 是 V 上的二次函数. 如果 $q(\xi) = 0$, 那么称 ξ 是 q 的零向量. 证明如果 $q(\alpha)$ 的表达式是不定的二次型, 那么 V 中存在由 q 得零向量组成的一个基.

Exercise 3　设 V 是实数于上的 n 维线性空间,q 是 V 上的二次函数.q 的所有零向量组成的集合 S 称为 q 的零锥. 证明 q 的零锥 S 是 V 的一个子空间的充要条件是 q 的表达式是半正定或半负定的二次型.

Exercise 4　设 q 是 n 维欧式空间上的一个二次函数, 证明 q 的零锥包含 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基的充要条件是 q 在 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基下的矩阵的迹为 0, 这里 q 在基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 下的矩阵是 $q(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$ 中的 f 在这个基下的度量矩阵.

Exercise 5 证明 n 阶实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 正交相似于主对角元全为 0 的矩阵当且仅当 $tr(\mathbf{A}) = 0$.

Exercise 6 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 都是正定矩阵, 证明 $\mathbf{AB}$ 的特征值均为正数.