一、复正规矩阵的特征：复矩阵 A 酉相似于对角阵 $\Leftrightarrow$ A 为复正规矩阵.

引理 1.1. V 为酉空间，φ 为 V 上线性变换，取 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一组标准正交基，设 φ 在此基下的表示矩阵 A 为上三角阵，则 φ 为正规算子当且仅当 A 为对角阵.

证明. ($\Leftarrow$) A 为对角，则 $A\bar{A}^T = \bar{A}^T A$，即 $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi \Rightarrow \varphi$ 为正规算子；

($\Rightarrow$) 若 φ 正规，设 $A = (a_{ij})$，$a_{ij} = 0\ (i > j)$，$\varphi(e_1) = a_{11} e_1$，$\varphi^*(e_1) = \bar{a}_{11} e_1$

令一方面，$\varphi^*(e_1) = \bar{a}_{11} e_1 + \bar{a}_{12} e_2 + \cdots + \bar{a}_{1n} e_n$，故 $a_{1j} = 0\ (\forall j > 1)$.

故 $\varphi(e_2) = a_{22} e_2$，同上不断做下去 $\Rightarrow A$ 为对角阵. □

引理 1.2. (Schur 定理) 设 V 为 n 维酉空间，φ 为 V 上线性算子，则 $\exists\, V$ 的一组标准正交基使 φ 的表示矩阵为上三角阵.

证明：对 n 归纳. 当 $n=1$ 时平凡，设 $n-1$ 时成立，考虑 n 的情况.

设 $\varphi^*(e) = \lambda e$，$W = (\mathrm{Span}(e))^{\perp}$，则 W 为 $(\varphi^*)^* = \varphi$ 的不变子空间.

$\dim W = n-1$，由归纳假设 $\exists\, W$ 的标准正交基 $\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ 使 $\varphi|_W$ 表示阵为上三角阵. 令 $e_n = \frac{e}{\|e\|}$，则 $\{e_1, \cdots, e_{n-1}, e\}$ 为 V 上一组标准正交基，φ 为上三角阵！ □

主定理证明：由引理 1.2 $\Rightarrow A$ 必酉相似于一个上三角阵，

则 A 为酉相似于对角阵由引理 1.1 $\Leftrightarrow$ A 为复正规阵. □

二实正规矩阵的结构. A为实正规阵, 则A正交相似于

$$diag(A_1, \cdots, A_r, \lambda_{2r+1}, \cdots, \lambda_n),\quad (\lambda_i \text{为特征值})$$

其中$\lambda_j \in \mathbb{R}$, $(j \geq 2r+1)$, $A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, 而 $\lambda_{2k-1} = a_k + ib_k$, $\lambda_{2k} = a_k - ib_k$, $(b_1 \cdots b_r \neq 0)$.

引理2.1. $\lambda = a+bi$为A之特征值, $x = u+vi$为λ特征向量, 则$\bar{x}$为$\bar{\lambda}$的特征向量.

证明: $A(u+vi) = Au + iAv$, 且 $A(u+vi) = (au-bv) + i(bu+av)$

则 $\begin{cases} Au = au-bv \\ Av = bu+av \end{cases}$, 故 $A(u-vi) = Au - iAv$

$= au-bv-ibu-iav$

$= (a-bi)(u-vi)$. □

引理2.2. $x = u+vi$为λ的特征向量, 则u与v线性无关, 其中$\lambda \notin \mathbb{R}$.

证明: 反证, 若相关, 则 $u = kv$, $x = (k+i)v$, 则

$Ax = (k+i)Av$, 而 $Ax = \lambda x = (k+i)\lambda v$

$\Rightarrow Av = \lambda v \Rightarrow v$为$\lambda$的特征向量, $\Rightarrow \lambda$为实数, 矛盾. □

主定理证明. 当$r>0$时, 设$\alpha_1 = u_1 + iv_1$为A属于λ_1的特征向量.

由引理2.1与2.2 $\Rightarrow u_1, v_1$线性无关, 且$\alpha_2 = u_1 - iv_1$为A属于$\lambda_2 (= \bar{\lambda}_1)$的特征向量. 将$\{u_1, v_1\}$由Gram-Schmidt 标准正交化为$\{\beta_1, \beta_2\}$,

并扩为标准正交基 $P = (\beta_1 \cdots \beta_n)$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$, 其中$A_1 \in M_2(\mathbb{R})$.

由于正规 $\Rightarrow A_1A_1^T + A_2A_2^T = A_1^TA_1$, 则 $tr(A_2A_2^T) = 0 \Rightarrow A_2 = 0$, 故

A_1与A_3均为正规阵, 而A_1特征值为$a_1 \pm ib_1$, 且正规 $\Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$

当$r=0$时, α_1为A属于λ_1的实特征向量, 令 $\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}$ 扩为标准

正交基 $P = (\beta_1, \cdots \beta_n)$. 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$, 正规 $\Rightarrow A_2 = 0$, A_3正规

综合上述二点, 用阶数归纳得到结论! □

1、A 正交，A特征值全为实数，证明：A为对称阵。

（证明）由于 A 正交 ⇒ A 正规，且∃正交阵 P 使（由特征值为实数）

$$P^TAP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}:=C \quad \lambda_i\in\mathbb{R}。$$

由正规性 ⇒ $C^TC=CC^T$，即 C 为对角阵！

则 $A=PCP^T$，$A^T=PC^TP^T=PCP^T=A$. □

2、A正定，则 $(\alpha^T\beta)^2\le(\alpha^TA\alpha)(\beta^TA^{-1}\beta)$.

（证明）由 A 正定 ⇒ $A=C^TC$，则
（C可逆）

$$(\alpha^TA\alpha)(\beta^TA^{-1}\beta)=(\alpha^TC^TC\alpha)(\beta^TC^{-1}(C^T)^{-1}\beta)$$

$$=(C\alpha)^T(C\alpha)((C^T)^{-1}\beta)^T((C^T)^{-1}\beta)$$

$$=\|C\alpha\|^2\|(C^T)^{-1}\beta\|^2\ge\left(\alpha^TC^T(C^T)^{-1}\beta\right)^2$$

$$=(\alpha^T\beta)^2. \quad \square$$

（类似：若A半正定，则 $\|x^TAy\|^2\le\|x^TAx\|\|y^TAy\|$.）

3. $\det(A)\neq0$，证明：∃正定 B，正交 Q 使 $A=BQ$.

（证明）. 由 AA^T 正定，∃P正交使 $AA^T=P^T\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P$，$\lambda_i>0$.

取 $B=P^T\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}P$ ⇒ $AA^T=B^2$，B正定！

令 $Q=B^{-1}A$，则 $QQ^T=B^{-1}AA^T(B^{-1})^T=B^{-1}B^2(B^{-1})^T=B(B^{-1})^T$

$=E$.

⇒ Q正交 ⇒ $A=BQ$. □

5. A为正交矩阵，证明：

(1) A的实特征值为±1；(2) $\det(A)\in\{\pm 1\}$；(3) 若 $A,B\in O(n)$，且 $\det(A)\neq\det(B)$，则 $\det(A+B)=0$.

(4) $A,B\in O(n)$，n奇，则 $\det((A+B)(A-B))=0$；(5) A若无实特征根，则 n 为偶；

(6) $A\in O(n)$，无实特征值，且可对角化，则A相似于 $\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\right)$.

(证明) (1) 设 $Ax=\lambda x \Rightarrow \bar{x}^T A^T=\bar{\lambda}\bar{x}^T \Rightarrow \bar{x}^T A^T A x=\bar{\lambda}\lambda\bar{x}^T x$

故 $\bar{x}^T x=|\lambda|^2\bar{x}^T x$，$\Rightarrow |\lambda|^2=1$. □

(2) $A^TA=I \Rightarrow \det(A)^2=1$，但 $\det(A)\in\mathbb{R} \Rightarrow \det(A)\in\{\pm 1\}$. □

(3) $\det(A)\neq\det(B)$，则一个为1，一个为−1.

故 $\det(A)\det(B)=-1$，$\det(A^T)\det(B^T)=-1$.

则 $\det(A+B)=\det(A^T+B^T)$

$=\det(A^TAB^T+A^TBB^T)=\det(A^T(A+B)B^T)$

$=\det(A^T)\det(B^T)\det(A+B)=-\det(A+B)$，

则 $\det(A+B)=0$. □

(4) $\det((A-B)(A+B))=\det((A^T-B^T)(A+B))$

$=\det(A^TB-B^TA)$，而令 $C=A^TB-B^TA$

$\Rightarrow C^T=B^TA-A^TB=-C$，且 n 为奇，则

$\det(C)=\det(C^T)=\det(-C)=(-1)^n\det(C)=-\det(C)$

$\Rightarrow \det(C)=0 \Rightarrow \det((A-B)(A+B))=0$. □

(5) $\det(\lambda I_n-A)$ 为 n 次多项式，由于其无实根，但虚根成对，

$\Rightarrow n$ 必为偶数. □

(6) 这只需看正交阵的标准形即可，略. □

6、A实反对称，证明：$\exists P$正交使 $P^TA^2P = \mathrm{diag}(-\lambda_1^2, -\lambda_1^2, \dots, -\lambda_s^2, -\lambda_s^2, 0, \dots, 0)$，$\lambda_i \in \mathbb{R}$

(证明) 由于 $A^T=-A$，则 $AA^T=-A^2=A^TA$，则A实正规.

则$\exists \tilde{P}$正交使得：

$$\tilde{P}^T A \tilde{P} = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_s & b_s \\ -b_s & a_s \end{pmatrix}, c_{2s+1}, \dots, c_n\right).$$

由 $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}^T = -\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$ 得 $a_i=0$，由 $A^T=-A \Rightarrow c_i=0$.

令 $\lambda_i=b_i$，则

则 $\tilde{P}^T A \tilde{P} = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \lambda_s \\ -\lambda_s & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0\right)$

则 $\tilde{P}^T A^2 \tilde{P} = \tilde{P}^T A \tilde{P}\tilde{P}^T A \tilde{P} = \mathrm{diag}(-\lambda_1^2, -\lambda_1^2, \dots, -\lambda_s^2, -\lambda_s^2, 0, \dots, 0)$.

令 $P=\tilde{P}$ 即可！ □

~~7.~~

7、$\mathcal{A}$为有限维线性空间V上线性变换.

(1) 若有不变子空间W，证明：$\exists w \in W$ 使 $\{f(\mathcal{A})w : f 为多项式\} = W$；

(2) $\exists v \in V$ 使 $\{f(\mathcal{A})v : f 多项式\} = V \Leftrightarrow \mathcal{A}$的每个特征值的Jordan块只有1块.

(证明) (1) 选次数最小的非零多项式 f 使得 $f(\mathcal{A})v \in W$，断言$f(\mathcal{A})v$即为所求w.

$\forall x \in W$，设 $x=g(\mathcal{A})v$，作 $g=df+r$，$r(\mathcal{A})v = x - d(\mathcal{A})f(\mathcal{A})v \in W \Rightarrow r=0$

$\Rightarrow x = d(\mathcal{A})f(\mathcal{A})v = d(\mathcal{A})w$. ！ □

(2) ($\Rightarrow$) 由于 $V=\bigoplus_{j=1}^{m} \ker(\mathcal{A}-\lambda_j I)^{m_j}$，则 $\ker(\mathcal{A}-\lambda_j I)^{m_j} = \{f(\mathcal{A})x_j\}$，则

由 $x_j, (\mathcal{A}-\lambda_j I)x_j, \dots, (\mathcal{A}-\lambda_j I)^{m_j-1}x_j$ 线性无关 $\Rightarrow$ Jordan块1块.

($\Leftarrow$) $\ker(\mathcal{A}-\lambda_j I)^{m_j}$ 为循环子空间，由 $x_j, \dots, (\mathcal{A}-\lambda_j I)^{m_j-1}x_j$ 线性无关

则 $x_1+\dots+x_m=v$ 满足题意！ 用(1) $\Rightarrow \forall i, \exists p_i \Rightarrow x_i = p_i(\mathcal{A})v$ ✓. □

$\ker\varphi \cap \mathrm{Im}\varphi = 0 \iff \ker\varphi = \ker\varphi^2$

$\iff$ 0 在 Jordan 块均为1阶.

---

8. [Cartan-Dieudonné] (镜像变换: $\|v\|=1$, $\varphi(x) = x - 2(v,x)v$).

n 维欧氏空间任一正交变换 φ 均可表为不超过 n 个镜像变换之积.

(证明) 引理. 设 $\|u\|=\|v\|$, 且 $u\neq v$, 则 $\exists$ 镜像变换 $\tilde\varphi$ 使 $\varphi(u)=v$.

引理证明. 令 $e = \frac{u-v}{\|u-v\|}$, 令义 $\tilde\varphi(x) = x - 2(e,x)e$, ✓. □

原定理: 对 n 归纳. 当 $n=1$ 时 φ 或为 id, 或为 $-$id, 成立!

设 $n-1$ 成立. 设 V 为 n 维空间. 若 $\varphi=$ id, 成立. 否则, 取 V 标准正交基 $e_1,\cdots,e_n$ 且 $\varphi(e_1)\neq e_1$, 由 $\|\varphi(e_1)\| = \|e_1\| = 1$,

由引理 $\Rightarrow \exists$ 镜像变换 ψ 使 $\psi\varphi(e_1) = e_1$, $\psi\varphi$ 也为正交变换!

$(\psi\varphi)^* e_1 = (\psi\varphi)^{-1} e_1 = e_1$, 则 $L(e_1)^\perp$ 为 $\psi\varphi$ 不变子空间.

由归纳假设, $\psi\varphi|_{V_1} = \psi_1\cdots\psi_k$ $(k\le n-1)$. 将 ψ_i 扩到 V 上, $\psi_i(e_1)=e_1$!
$\Rightarrow \varphi = \psi^{-1}\psi_1\cdots\psi_k$ ✓. □

▷ n 维内积空间 V, 一组向量 $e_1,\cdots,e_r$, 若两两内积为负, 求 r 的最大值.

(简答) 若 $e_1,\cdots,e_s$ 线性相关, 则令 $L = \sum_{i\in A}\lambda_i e_i = \sum_{j\in B}\lambda_j e_j = R$, $\lambda_i>0$, $A\cup B \subseteq \{1,\cdots,s\}$

若 $A, B\neq\phi$, 则 $0<\langle L,L\rangle = \langle R,L\rangle < 0$, 矛盾, 故 A 或 B 为 ϕ.

则线性关系为 $\sum_{i=1}^{s}\lambda_i e_i = 0$ $(\lambda_i\ge 0)$. 令 $s=r-1$, 并对 e_r 作内积 $\Rightarrow \lambda_i = 0$.

故 $e_1,\cdots,e_{r-1}$ 线性无关 $\Rightarrow r\le n+1$.

用归纳法取最大值. 取 e_{n+1}, 在其正交补中取 $e_1',\cdots,e_n'$ 两两内积为负

而 $\langle e_i' - \varepsilon e_{n+1}, e_j' - \varepsilon e_{n+1}\rangle = \langle e_i', e_j'\rangle + \varepsilon^2\langle e_{n+1}, e_{n+1}\rangle$.

取 $0<\varepsilon<\sqrt{\max_{i\neq j}|\langle e_i', e_j'\rangle|}$. ✓ □

4. $A, B \in M_{n\times n}$，$A+BA=B$，$\lambda_1 \longrightarrow \lambda_n$ 为 A 特征值.

证明：(1) $\lambda_i \neq 1$ $(\forall i)$. ；(2) 若 A 对称，则 $\exists P$ 正交 $\Rightarrow P^TBP=\begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n} \end{pmatrix}$.

(证明) (1) $A\alpha = \lambda_i \alpha$，~~若 $\lambda_i=1$~~

$(A+BA)\alpha = \lambda_i\alpha + \lambda_i B\alpha = B\alpha$

若 $\lambda_i = 1 \Rightarrow \alpha = 0$，矛盾!

(2) $\exists$ 正交 $P \Rightarrow P^TAP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

则令 $C=P^TBP$，则 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = C$

即 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1-\lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow C=\begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n} \end{pmatrix}$. □

10. 设 $V_1, V_2, V_3 \subseteq V$. 证明：

$$\dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 \geq \dim(V_1+V_2+V_3) + \dim(V_1\cap V_2) + \dim(V_2\cap V_3) + \dim(V_1\cap V_3) - \dim(V_1\cap V_2\cap V_3).$$

(证明) 即证 $\dim(V_1+V_2) + \dim V_3 \geq \dim(V_1+V_2+V_3) + \dim(V_2\cap V_3) + \dim(V_1\cap V_3) - \dim(V_1\cap V_2\cap V_3)$.

即证 $\dim((V_1+V_2)\cap V_3) \geq \dim(V_2\cap V_3) + \dim(V_1\cap V_3) - \dim(V_1\cap V_2\cap V_3)$.

而 $\dim(V_2\cap V_3) + \dim(V_1\cap V_3) = \dim(V_1\cap V_3 + V_2\cap V_3) + \dim(V_1\cap V_2\cap V_3)$.

即证 $\dim((V_1+V_2)\cap V_3) \geq \dim(V_1\cap V_3 + V_2\cap V_3)$.

这由 $(V_1+V_2)\cap V_3 \supseteq V_1\cap V_3 + V_2\cap V_3$ 即得. □

11. $A, B \in M_{n\times n}$，A 有 n 个不同特征值.

(1) A 的特征向量也是 B 的特征向量 $\Leftrightarrow AB=BA$

(2) 若 $AB=BA$，则 $\exists \deg f \leq n-1$，$B=f(A)$.

(证明) (1) ($\Rightarrow$) 废话，取 A 的特征子空间分解，各取基，在此基下 A 与 B 均为对角 $\Rightarrow AB=BA$

($\Leftarrow$). $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$，$P^{-1}BP=(b_{ij})$. $AB=BA \Rightarrow (\lambda_i-\lambda_j)b_{ij}=0$.

而 $i\neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow b_{ij}=0$ $(i\neq j)$ ✓ □

(2) 由(1)($\Leftarrow$)的论证知 $\exists P$ 使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$，$P^{-1}BP=\begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$.

由 Lagrange 插值 $\Rightarrow$ 由 $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \exists \deg f \leq n-1$，$f(\lambda_i)=\mu_i$.

$\Rightarrow P^{-1}BP = P^{-1}f(A)P \Rightarrow B=f(A)$. □

12. $A\in M_{n\times n}$, $0\neq\alpha_1\in V_\lambda$, $A\alpha_1=\lambda\alpha_1$

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 满足 $(A-\lambda I)\alpha_{i+1}=\alpha_i$ $(i=1,\cdots,n-1)$，证 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

(证明). $\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i=0 \Rightarrow (A-\lambda I)\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i=\sum_{i=1}^{n-1}k_{i+1}\alpha_i=0$ 归纳 ✓. □

13. $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 特征值，且 $\lambda_i+\lambda_j\neq 0$

(1) $T: M_{n\times n}\to M_{n\times n}$, $T(X)=A^TX+XA$.

证明：$\ker T=0$.

(2). 证明：~~Im~~ T 为满射.

(证明). (1) 设 $X\in\ker T \Rightarrow A^TX+XA=0$, $XA=-A^TX$

则 $(-A^T)^kX=XA^k$ $(\forall k) \Rightarrow f(-A^T)X=Xf(A)$, f 多项式.

设 f 为 A 特征多项式 $\Rightarrow$ Hamilton-Cayley $\Rightarrow f(-A^T)X=0$.

即 $(-A^T-\lambda_1I)\cdots(-A^T-\lambda_nI)X=0$.

$A\sim A^T$, A^T 特征值为 $-\lambda_1,\cdots,-\lambda_n$，由 $\lambda_i+\lambda_j\neq0$.

$\Rightarrow f(-A^T)$ 可逆 $\Rightarrow X=0$. □

可以推广：$AX-XB=C$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ A 与 B 无公共特征值. (例 7.4P 7 -10).

(证由 $A^TX+XA=A^TX-X(-A)$，~~A~~ 由 $\lambda_i\neq-\lambda_j$ $\Rightarrow$ 无公共特征值). □

14. $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, (1) $\forall\alpha\in\mathbb{R}^n$ $(\alpha\neq0)$ 有 $\alpha^TA\alpha<0$，则 A 的特征值实部 <0.

(2) $\forall\, 0\neq\alpha\in\mathbb{R}^n$, $\alpha^TA\alpha>0$，则 $\det(A)>0$.

(证明) (1) 设 $\lambda=a+bi$ 为 A 特征值，$A\alpha=\lambda\alpha$，设 $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$

$\Rightarrow \begin{cases} A\alpha_1=a\alpha_1-b\alpha_2 \\ A\alpha_2=a\alpha_2+b\alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1^TA\alpha_1=a\alpha_1^T\alpha_1-b\alpha_1^T\alpha_2<0 \\ \alpha_2^TA\alpha_2=a\alpha_2^T\alpha_2+b\alpha_2^T\alpha_1<0 \end{cases}$

$\Rightarrow a\alpha_1^T\alpha_1+a\alpha_2^T\alpha_2<0$，由 $\alpha_1^T\alpha_1+\alpha_2^T\alpha_2>0 \Rightarrow a<0$. □

(2) $\det(A)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=\prod_{\lambda_i\in\mathbb{R}}\lambda_i\prod_{\lambda_j\notin\mathbb{R}}\lambda_j$

由虚根成对 $\Rightarrow \prod_{\lambda_j\notin\mathbb{R}}\lambda_j\in\mathbb{R}_+$,

若 $\lambda_i\in\mathbb{R}$, $A\alpha=\lambda_i\alpha$, $\alpha^TA\alpha=\lambda_i\alpha^T\alpha>0\Rightarrow\lambda_i>0$. ✓ □

15、A可逆，λ_0为 $f(\lambda)=\det(\lambda A-A^T)$ 根，则 $\frac{1}{\lambda_0}$ 也为 $f(\lambda)$ 根

(证明) 令 $g(\lambda)=\det(\lambda I-A^{-1}A^T)$，则 $g(\lambda_0)=0$. $\Rightarrow \frac{1}{\lambda_0}$ 为 $(A^{-1}A^T)^{-1}$ 特征值

$\Rightarrow \det\left(\frac{1}{\lambda_0}I-(A^T)^{-1}A\right)=0$，即 $\det\left(\frac{1}{\lambda_0}A^T-A\right)=0$.

转置 $\Rightarrow \det\left(\frac{1}{\lambda_0}A-A^T\right)=0$ □

16. A,B,A_1,B_1 方阵，且 A,A_1 可逆

(证明). ∃可逆阵 P,Q 使 $A_1=PAQ$，$B_1=PBQ$

$\Leftrightarrow$ $\lambda A-B$ 与 λA_1-B_1 有相同不变因子.

(证明). ($\Rightarrow$) 有 $(\lambda A_1-B_1)=P(\lambda A-B)Q$ $\Rightarrow$ 相抵 $\Rightarrow$ 不变因子相同.

($\Leftarrow$) 不变因子相同 $\Rightarrow$ (λA_1-B_1) 与 $\lambda A-B$ 相抵

即 $\lambda I-A^{-1}B$ 与 $\lambda I-A_1^{-1}B_1$ 相抵

$\Rightarrow A^{-1}B\sim A_1^{-1}B_1$

$\Rightarrow A_1^{-1}B_1=\tilde{P}A^{-1}B\tilde{P}^{-1} \Rightarrow B_1=(A_1\tilde{P}A^{-1})B\tilde{P}^{-1}$

而 $A_1\tilde{P}A^{-1}A\tilde{P}^{-1}=A_1 \Rightarrow$ ✓. □

17. A方阵，$f,g\in\mathbb{F}[\lambda]$，$g(A)=0$，$\deg g,\deg f\geq 1$.

$(g,f)=d$. 证明：$\operatorname{rank}(f(A))=\operatorname{rank}(d(A))$.

(证明) $gv+fu=d \Rightarrow f(A)u(A)=d(A) \Rightarrow \operatorname{rank}(f(A))\geq\operatorname{rank}(d(A))$

而∃$h \Rightarrow d(\lambda)h(\lambda)=f(\lambda) \Rightarrow \operatorname{rank}(f(A))\leq\operatorname{rank}(d(A))$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(f(A))=\operatorname{rank}(d(A))$. □

18. 设A,B为m,n阶阵，C为$m\times n$阶阵，证明：$AX-XB=C$有唯一解 $\Leftrightarrow$ A与B无公共特征值.

(证明). 不妨设B为Jordan标准型，令$X=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$C=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$

则 方程化为 $(A\alpha_1,\cdots,A\alpha_n)-(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)B=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$.

若B有k个Jordan块 $\Rightarrow$ 上述有k个独立方程组，则有唯一解 $\Leftrightarrow$ k个都有唯一解.

且若k中另个无解 $\Rightarrow$ 无解；若都有解，但某有∞解 $\Rightarrow$ 有∞个解.

故不妨设B为Jordan块 $B=J_n(\lambda_0)$.

($\Leftarrow$). 方程组为 $A\alpha_1-\lambda_0\alpha_1=\beta_1$，$A\alpha_2-(\alpha_1+\lambda_0\alpha_2)=\beta_2$，$\cdots$，$A\alpha_n-(\alpha_{n-1}+\lambda_0\alpha_n)=\beta_n$.

由于无公共特征根 $\Rightarrow$ λ_0不是A特征值 $\Rightarrow$ $A-\lambda_0I$可逆，则

$\alpha_1=(A-\lambda_0I)^{-1}\beta_1$，$\cdots\cdots$ $\Rightarrow$ 有唯一解!

($\Rightarrow$) 为$(A-\lambda_0I)\alpha_1=\beta_1$，$(A-\lambda_0I)\alpha_2=\alpha_1+\beta_2$，$\cdots$，$(A-\lambda_0I)\alpha_n=\alpha_{n-1}+\beta_n$ $\Rightarrow$

反证法，若λ_0为A特征值 $\Rightarrow$ $\cancel{(A-\lambda_0I)\alpha_1=\beta}$ $(A-\lambda_0I)x=0$ 有无穷个解

若$AX-XB=C$无解 $\Rightarrow$ 矛盾! 若有解，取一组为$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$

则 ~~$(\alpha_1+\alpha_0$~~ 令α_0为$(A-\lambda_0I)x=0$一个解，则$(\alpha_1+\alpha_0,\cdots,\alpha_n+\alpha_0)$ $\Rightarrow\cdots$

$\Rightarrow$ $AX-XB=C$ 有无穷个解! 矛盾! □

19. J为特征值λ_0的Jordan块，$AJ=JA$ $\Rightarrow$ $\exists\deg f\le n-1$，$A=f(J)$

[证明] $J=\lambda_0I_n+J_0$，则$AJ=JA$ $\Rightarrow$ $AJ_0=J_0A$ $\Rightarrow$ $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_2 \\ & & & a_1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A=a_1I_n+a_2J_0+\cdots+a_nJ_0^{n-1}=a_1I_n+a_2(J-\lambda_0I)+\cdots+a_n(J-\lambda_0I)^{n-1}$ □

20. (Jordan−Chevalley 分解). A为n阶复矩阵，证明：$A=B+C$，

其中B可对角化，C幂零且$BC=CB$，且B,C为A的多项式，且分解唯一.

(证明). 用Jordan标准型很容易得到$A=B+C$，且$BC=CB$.

引理. $A=\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_k \end{pmatrix}$，且$g_i(A_i)=0$，$g_i$两两互素，且$B_i=f_i(A_i)$.

则$\exists$次数$\le n-1$的f $\Rightarrow$ $B=f(A)$.

引理证明：中国剩余 $\Rightarrow\exists h$ $\Rightarrow$ $h(x)=g_i(x)q_i(x)+f_i(x)$ $\Rightarrow$ $h(A_i)=B_i$.

$\Rightarrow h(A)=B$. 设A的特征多项式为g，作$h=g(x)q(x)+f(x)$，$\deg f<n$

$\Rightarrow B=h(A)=f(A)$ ✓. □

唯一性证明：由引理知$B=f(A)$，其中$f_i(\lambda)=\lambda_i$为常值 $\Rightarrow$ $C=A-B=A-f(A)$. 下证唯一性

若另有 $A=B_1+C_1$ 满足条件 $\Rightarrow AB_1=B_1(B_1+C_1)=B_1A$，同理 $AC_1=C_1A$

由于 B_1C 为 A 的多项式 $\Rightarrow B\&B_1$ 交换，$C\&C_1$ 交换，则 $B\&B_1$ 可同时对角化.

$Q^{-1}BQ \ \& \ Q^{-1}B_1Q$ 对角 $\Rightarrow B-B_1\sim$ 对角．且 C_1-C 幂零

且 $B-B_1=C-C_1 \Rightarrow B-B_1=0$，$C-C_1=0 \Rightarrow B=B_1$，$C=C_1$ ． □

21. g 为 V 上对称型 or 交错型，$U\subseteq V$，证明：

$U\cap U^{\perp}=0 \Leftrightarrow g|_U$ 为非退化；此时有 $U\oplus U^{\perp}=V$.

(证明). 若 $U\cap U^{\perp}=0 \Leftrightarrow \forall \underset{\neq 0}{u}\in U$，$g(u,U)\neq 0 \Leftrightarrow g|_U$ 非退化.

此时，作 $\varphi: V\to U^*$，$v\mapsto g(v,-)$，则 $\ker\varphi=U^{\perp}$，由 $g|_U$ 非退化 $\Rightarrow \varphi$ 为 U 到 U^* 同构

$\Rightarrow \underset{\dim U}{\underset{\parallel}{\dim U^*}}+\dim U^{\perp}=n$，由 $U\cap U^{\perp}=0$ $\Rightarrow U\oplus U^{\perp}=V$. □.

22. $A\in M_{n\times n}$，证：$r(A^n)=r(A^{n+1})=\cdots\cdots$

(证明). 考虑线性变换 φ.

$V\supseteq \mathrm{Im}\,\varphi\supseteq\cdots\cdots\supseteq \mathrm{Im}\,\varphi^n\supseteq \mathrm{Im}\,\varphi^{n+1}$.

由维数 $\Rightarrow \exists m \Rightarrow \mathrm{Im}\,\varphi^m=\mathrm{Im}\,\varphi^{m+1}$，$m\leq n$.

断言 $\forall k\geq m$，$\mathrm{Im}\,\varphi^k=\mathrm{Im}\,\varphi^{k+1}$．只需证 $\mathrm{Im}\,\varphi^{k+1}\supseteq \mathrm{Im}\,\varphi^k$.

$\forall \alpha\in \mathrm{Im}\,\varphi^k$，$\exists \beta\in V$，$\alpha=\varphi^k(\beta)$，$\varphi^m(\beta)\in \mathrm{Im}\,\varphi^m=\mathrm{Im}\,\varphi^{m+1}$

$\Rightarrow \exists \gamma\in V$，$\varphi^m(\beta)=\varphi^{m+1}(\gamma)$.

$\Rightarrow \alpha=\varphi^k(\beta)=\varphi^{k-m}(\varphi^m(\beta))=\varphi^{k+1}(\gamma)\in \mathrm{Im}\,\varphi^{k+1}$. □.

1、V, W 为域 F 向量空间，取 $v_i \in V$，$w_i \in W$，若 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 线性无关，由 $\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i = 0$，则 $w_1 = \cdots = w_n = 0$.

(证明). 取 $\alpha \in V^*$，$\beta \in W^*$，令 $g: V \times W \to F$ 为 $(v, w) \mapsto \alpha(v)\beta(w)$

$\exists!h$ 使
$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r] \arrow[dr, "g"'] & V\otimes W \arrow[d, "\exists! h"] \\ & F \end{tikzcd}$$
交换！由 $\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i = 0$ 得

$$0 = h\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i\right) = \sum_{i=1}^{n} h(v_i \otimes w_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(v_i)\beta(w_i)$$

由 $\{v_i\}$ 无关，取 $v_j^* \in V^*$ 使 $v_j^*(v_i) = \delta_{ij}$，则

令 $\alpha = v_j^* \Rightarrow \beta(w_i) = 0$，$\forall i$. 由 $\beta \in W^*$ 任意性 $\Rightarrow w_i = 0$. ✓ □

2、~~证明~~ 设 V, W 有限维向量空间. 证明：$V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}_F(V, W)$.

(证明) 定义 $\phi: V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}_F(V, W)$

$v^* \otimes w \mapsto (\tilde{v} \mapsto \langle \tilde{v}, v^* \rangle w)$ 　　不难验证 $\phi \circ \psi = id$，$\psi \circ \phi = id$.

定义 $\psi: \mathrm{Hom}_F(V, W) \to V^* \otimes W$ ✓. □

$$T \longmapsto \sum_{j=1}^{n} v_j^* \otimes T(v_j).$$

3、有限维空间 A, B, C，有同构：$\mathrm{Hom}_F(A \otimes B, C) \cong \mathrm{Hom}_F(A, \mathrm{Hom}(B, C))$.

(证明) 定义 $\Phi: \mathrm{Hom}_F(A \otimes B, C) \to \mathrm{Hom}_F(A, \mathrm{Hom}_F(B, C))$.

$$f \longmapsto (a \longmapsto (b \mapsto f(a \otimes b)))$$

① Φ 单：若 $\Phi(f)(a) = 0$，$\forall a \in A$，则 $\forall a, b$，$f(a \otimes b) = 0 \Rightarrow f = 0$ ✓.

② Φ 满：取 $F: A \to \mathrm{Hom}_F(B, C)$. 定义 $\varphi: A \times B \to C$

$(a, b) \mapsto F(a)(b)$.

$$\begin{tikzcd} A\times B \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\varphi"'] & A\otimes B \arrow[d, "\exists!\tilde{\varphi}"] \\ & C \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow F = \Phi(\tilde{\varphi}) \Rightarrow \Phi$ 满 ✓ □

4. V, W 有限维，证明：$V^* \otimes W^* \cong (V \otimes W)^*$

(证明)：$\mathrm{Hom}(V \otimes W, F) = (V \otimes W)^* \cong \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(W, F))$
$\cong \mathrm{Hom}(V, W^*) \cong V^* \otimes W^*$ □

5. V, W 有限维，证：$\mathrm{End}_F(V) \otimes \mathrm{End}_F(W) \cong \mathrm{End}(V \otimes W)$

(证明) LHS $\cong V^* \otimes V \otimes W^* \otimes W \cong (V \otimes W)^* \otimes (V \otimes W) \cong \mathrm{End}(V \otimes W)$. □

6. $0\to V' \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} V'' \to 0$，$\forall W$，有 $W\otimes V' \xrightarrow{1\otimes\varphi} W\otimes V \xrightarrow{1\otimes\psi} W\otimes V'' \to 0$.

(更多地，线性空间有平坦性：$1\otimes\varphi$ 单)

(证明) ① ψ 满，由于 $W\otimes V''$ 中 $\sum w_i\otimes\psi(v_i) = (1\otimes\psi)(\sum w_i\otimes v_i)$.

$\Rightarrow 1\otimes\psi$ 满.

② $(1\otimes\psi)(1\otimes\varphi) = 1\otimes\psi\varphi = 1\otimes 0 = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(1\otimes\varphi)\subseteq\ker(1\otimes\psi)$.

③ 证明：$\underbrace{\mathrm{Im}(1\otimes\varphi)}_{I} = \underbrace{\ker(1\otimes\psi)}_{K}$，$I\subseteq K$ ✓.

定义 $\theta: W\otimes V/I \to W\otimes V''$，只需证 θ 为同构！

$x\otimes y + I \mapsto x\otimes\psi(y)$

构造逆映射 $\eta: W\otimes V'' \to W\otimes V/I$.

首先令 $\beta: W\times V'' \to W\otimes V/I$

$(x, y'') \mapsto x\otimes y + I$，其中 $\psi(y) = y''$.

下面证良定！若 $\psi(y_1)=\psi(y_2)=y'' \Rightarrow y_1-y_2\in\ker\psi = \mathrm{Im}\,\varphi$

$\Rightarrow y_1-y_2=\varphi(y') \Rightarrow x\otimes y_1 + I = x\otimes y_2 + I$.

$\Rightarrow$ 良定，$\Rightarrow$ 诱导 $\eta: W\otimes V''\to W\otimes V/I$，逆映射不难证明. □

(易证 $1\otimes\varphi$ 单. 取 W 基 $\{w_i\}$，$\forall x\in W\otimes V'$，$x=\sum_i w_i\otimes v_i$.

$\Rightarrow$ 若 $(1\otimes\varphi)(x)=0 \Rightarrow \sum_i w_i\otimes\varphi(w_i)=0$. 由之可 $\Rightarrow$ $\varphi(v_i)=0$

由 φ 单 $\Rightarrow$ $v_i=0$ $\Rightarrow x=0 \Rightarrow 1\otimes\varphi$ 单！□).

7. $\phi_1: V_1\to W_1$，$\phi_2: V_2\to W_2$. 有：$\ker(\phi_1\otimes\phi_2) = \ker\phi_1\otimes V_2 + \ker\phi_2\otimes V_1$.

$\mathrm{Im}(\phi_1\otimes\phi_2) = (\mathrm{Im}\,\phi_1)\otimes(\mathrm{Im}\,\phi_2)$.

(证明) 令 $i:\ker\phi_1 \hookrightarrow V_1$，$j:\ker\phi_2\hookrightarrow V_2$. 有：

$$\begin{tikzcd}
\ker\phi_1\otimes\ker\phi_2 \arrow[r, "i\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes j"] & V_1\otimes\ker\phi_2 \arrow[r, "\phi_1\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes j"] & W_1\otimes\ker\phi_2 \arrow[r] \arrow[d, "1\otimes j"] & 0 \\
\ker\phi_1\otimes V_2 \arrow[r, "i\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\phi_2"] & V_1\otimes V_2 \arrow[r, "\phi_1\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\phi_2"] \arrow[dr, "\phi_1\otimes\phi_2"] & W_1\otimes V_2 \arrow[r] \arrow[d, "1\otimes\phi_2"] & 0 \\
\ker\phi_1\otimes W_2 \arrow[r, "i\otimes 1"] \arrow[d] & V_1\otimes W_2 \arrow[r, "\phi_1\otimes 1"] \arrow[d] & W_1\otimes W_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{追图而可}}$

显然 $\ker\phi_1\otimes\phi_2 \supseteq$ - —— ~

另一方面，$\forall x\in\ker\phi_1\otimes\phi_2$

令 $y=1\otimes\phi_2(x)$，$\phi_1\otimes 1(y)=0$

$\Rightarrow \exists z\in\ker\phi_2\otimes W_2$ 有：

$i\otimes 1(z)=y$.

$\exists w\in\ker\phi_1\otimes V_2$ 使 $1\otimes\phi_2(w)=z$

令 $u=i\otimes 1(w)$，则 $(1\otimes\phi_2)(x-u)=0$

$\Rightarrow \exists v\in V_1\otimes\ker\phi_2$，$1\otimes j(v)=x-u$

$x=1\otimes j(v)+u=1\otimes j(v)+i\otimes 1(w)$

$\in\ker\phi_1\otimes V_2+\ker\phi_2\otimes V_1$. □