2021 复分析作业

19 学堂数学——温尊

1 第一次

问题 1.1. 设 $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$, 其中 $a_0,\cdots,a_n\in\mathbb{C}$ 且 $a_n\neq 0$. 证明: 存在 $z\in\mathbb{C}$ 满足 $|z|\leq 1$ 且 $|f(z)|\geq|a_n|+|a_0|$.

引理 1. 任何非常值复系数多项式在 $\mathbb{C}$ 中都有根.

引理的证明. 考虑多项式 $p(z)=z^n+a_1z^{n-1}+...+a_n$, 若 $a_n=0$, 则显然有根, 故设 $a_n\neq 0$, 假设无根. 对于任何实数 $r\geq 0$, 考虑 $S^1\subset\mathbb{C}$ 上基于 1 的环路 $f_r(s)=\frac{p(re^{2\pi is})/p(r)}{|p(re^{2\pi is})/p(r)|}$, 则其构成基在 1 的环路的同伦. 由于 f_0 平凡, 则类 $[f_r]\in\pi_1(S^1)$ 为零. 固定 $r>\max\{|a_1|+...+|a_n|,1\}$, 则对 $|z|=r$ 我们有

$$|z^n|=r^n=rr^{n-1}>(|a_1|+...+|a_n|)|z^{n-1}|\geq|a_1z^{n-1}+...+a_n|.$$

从得到的 $|z^n|>|a_1z^{n-1}+...+a_n|$, 我们可以得到多项式 $p_t(z)=z^n+t(a_1z^{n-1}+...+a_n)$ 在当 $0\leq t\leq 1$ 和 $|z|=r$ 上无根. 在 f_r 定义中将 p 替换为 p_t, 则我们得到从 f_r 到 $\omega_n=e^{2\pi ins}$ 的同伦. 事实上 ω_n 为 $\pi_1(S^1)$ 内生成元的 n 次方, 由于我们有 $[\omega_n]=[f_r]=0$, 则 $n=0$. □

解答. 设 $\theta=\arg(a_0)-\arg(a_n)$, 注意到 $|a_ne^{i\theta}+a_n|=|a_n|+|a_0|$, 记 $h(z)=f(z)-(a_0+a_ne^{i\theta})$, 由引理得存在 $z_1,...,z_n\in\mathbb{C}$ 使得 $h(z)=a_n\prod_{j=1}^n(z-z_j)$, 则 $a_ne^{i\theta}=h(0)=(-1)^na_nz_1\cdots z_n$, 则 $|z_1\cdots z_n|=1$, 则存在 $|z_i|\leq 1$ 有 $h(z_i)=0$, 即 $f(z_i)=a_0+a_ne^{i\theta}$, 则 $|f(z_i)|=|a_0+a_ne^{i\theta}|=|a_n|+|a_0|$, 得到结论. □

问题 1.2. 设 $f(z)=\dfrac{z}{1-z^2}$, 证明: 当 $|z|<1$ 时 $\mathrm{Re}\left(\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right)>0$.

解答. 由 $f(z)=\dfrac{z}{1-z^2}$ 得 $f'(z)=\dfrac{1+z^2}{(1-z^2)^2}$, 则

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=\frac{1+z^2}{1-z^2}=\frac{(1+z^2)(\overline{1-z^2})}{(1-z^2)(\overline{1-z^2})}=\frac{1+(2\mathrm{Im}z^2)i-|z|^4}{1-2\mathrm{Re}z^2+|z|^4},$$

则 $\mathrm{Re}\left(\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right)=\dfrac{1-|z|^4}{1-2\mathrm{Re}z^2+|z|^4}$, 由于 $|z|<1$, 则 $1-|z|^4>0$, 且

$$1-2\mathrm{Re}z^2+|z|^4\geq 1-2|z|^2+|z|^4=(1-|z|^2)^2>0,$$

则得到 $\mathrm{Re}\left(\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right)>0$. □

问题 1.3. 令 $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, 刻画集合 $\{z\in\mathbb{C}:\sin z=0\}, \{z\in\mathbb{C}:\cos z=0\}$.

解答. 事实上 $\sin z=0$ 当且仅当 $e^{2iz}=1$ 当且仅当 $2iz=2k\pi i$, 即 $\{z\in\mathbb{C}:\sin z=0\}=\{k\pi:k\in\mathbb{Z}\}$, 同理得到 $\{z\in\mathbb{C}:\cos z=0\}=\{\frac{\pi}{2}+k\pi:k\in\mathbb{Z}\}$. □

问题 1.4. 判断下列极限是否存在? 若存在, 求出极限.

$$(1)\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z};\quad (2)\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z};\quad (2)\lim_{z\to 0}\frac{z-z\cos z}{z-\sin z}.$$

引理 2. 若 $f(z),g(z)$ 在 z_0 处解析, 且满足 $f(z_0)=g(z_0)=0, g'(z_0)\neq 0$, 则有

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

引理的证明. 注意到

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)},$$

则得到结论. □

原题解答. 运用引理我们得到:

(1) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\cos z=1$;

(2) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z-1}{z}=\lim\limits_{z\to 0}e^z=1$;

(3) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z-z\cos z}{z-\sin z}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1+z\sin z-\cos z}{1-\cos z}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z+z\cos z+\sin z}{\sin z}=3$.

□

问题 1.5. 设 $z_1,...,z_n\in\mathbb{C}$ 是 n 个固定复数. 证明: 存在 $\{1,\cdots,n\}$ 的子集 I 使得

$$\left|\sum_{j\in I}z_j\right|\geq\frac{1}{6}\sum_{j=1}^n|z_j|.$$

解答. 记 $z_k = a_k + ib_k, a_k, b_k \in \mathbb{R}$, 则注意到

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}|z_j| \le \sum_{j=1}^{n}|a_j| + \sum_{j=1}^{n}|b_j| &= \sum_{a_k\ge 0}|a_k| + \sum_{a_k<0}|a_k| + \sum_{b_k\ge 0}|b_k| + \sum_{b_k<0}|b_k| \\ &= \left|\sum_{a_k\ge 0}a_k\right| + \left|\sum_{a_k<0}a_k\right| + \left|\sum_{b_k\ge 0}b_k\right| + \left|\sum_{b_k<0}b_k\right|,\end{aligned}$$

则必然存在四个中的一个不小于 $\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}|z_j|$, 不妨设 $\left|\sum_{a_k\ge 0}a_k\right| \ge \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}|z_j|$, 则由于

$$\left|\sum_{j=1}^{n}z_k\right| = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)^2} \ge \max\left\{\left|\sum a_k\right|, \left|\sum b_k\right|\right\},$$

则有

$$\left|\sum_{j\in I}z_j\right| = \left|\sum_{a_j\ge 0}z_j\right| \ge \left|\sum_{a_k\ge 0}a_k\right| \ge \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}|z_j| \ge \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n}|z_j|,$$

得到结论. □

问题 1.6. *设 f 在区域 D 上解析. 证明 $f(z)$ 满足下列条件之一时必为常值函数:*

(1) 在 D 内 $f'(z)=0$;

(2) $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析;

(3) $|f(z)|$ 在 D 内为常数;

(4) $\mathrm{Re}f(z)$ 在 D 内为常数.

解答. 记 $f = u + iv$.

(1) 因 $f' = 0$, 由 C-S 方程得到 $\partial_x u = \partial_y u = \partial_x v = \partial_y v = 0$, 则 u, v 为常值, 则 $f(z)$ 为常值函数;

(2) 因 $\bar{f} = u - iv$, 则 $\partial_x u = -\partial_y v = \partial_y v$ 且 $\partial_y u = \partial_x v = -\partial_x v$, 则 $\partial_x u = \partial_y u = \partial_x v = \partial_y v = 0$, 则 u, v 为常值, 则 $f(z)$ 为常值函数;

(3) 若 $|f| \equiv 0$, 则显然 $f \equiv 0$, 若 $|f| \equiv C \ne 0$, 则 f 处处不为零, 则 $f\bar{f} = C^2$, 得到 $\bar{f} = \frac{C^2}{f}$ 解析, 由 (2) 得到结论;

(4) 由条件得到 $\partial_x u = \partial_y u = 0$, 由 C-S 方程得到 $\partial_x v = \partial_y v = 0$, 则 u, v 为常值, 则 $f(z)$ 为常值函数. □

问题 1.7. *若 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 其中 D 为上半平面, 证明 $\overline{f(\bar{z})}$ 在下半平面内解析.*

解答. 注意到当 z 在下半平面时,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{f(\overline{z+\Delta z})}-\overline{f(\bar z)}}{\Delta z}=\overline{\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\overline{z+\Delta z})-f(\bar z)}{\overline{\Delta z}}}$$
$$=\overline{\lim_{\overline{\Delta z}\to 0}\frac{f(\bar z+\overline{\Delta z})-f(\bar z)}{\overline{\Delta z}}},$$

由于其在上半平面解析, 则 $\lim\limits_{\overline{\Delta z}\to 0}\frac{f(\bar z+\overline{\Delta z})-f(\bar z)}{\overline{\Delta z}}$ 存在, 因为 $\bar z$ 在上半平面, 则上述极限存在, 故 $\overline{f(\bar z)}$ 在下半平面内解析. □

2 第二次

问题 2.1. 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_{L_1}|z|dz$, 其中 L_1 是从 -1 到 1 的直线段;

(2) $\displaystyle\int_{L_2}|z|dz$, 其中 L_1 是从 -1 到 1 的上半圆圈;

(3) $\displaystyle\int_{L_3}|z|dz$, 其中 L_1 是从 -1 到 1 的下半圆圈;

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos t}{5+4\cos t}dt$;

(5) $\displaystyle\int_{C_j}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}z)}{z^2-1}dz, 1\le j\le 3$, 其中 $C_1:|z+1|=\frac{1}{2}$, $C_2:|z-1|=\frac{1}{2}$, $C_3:|z|=2$.

解答. (1) 我们有 $\displaystyle\int_{L_1}|z|dz=\int_{-1}^{1}|t|dt=1$;

(2) 我们有 $\displaystyle\int_{L_2}|z|dz=\int_{\pi}^{0}|e^{it}|ie^{it}dt=2$;

(3) 我们有 $\displaystyle\int_{L_3}|z|dz=\int_{-\pi}^{0}|e^{it}|ie^{it}dt=2$;

(4) 考虑积分 $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{dz}{z+2}$, 由 Cauchy 积分定理我们得到 $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{dz}{z+2}=0$, 另一方面, 注意到

$$0=\int_{|z|=1}\frac{dz}{z+2}=\int_0^{2\pi}\frac{ie^{it}}{e^{it}+2}dt=\int_0^{2\pi}\frac{-2\sin t+i(2\cos t+1)}{4\cos t+5}dt,$$

则由对称性和取虚部得到 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos t}{5+4\cos t}dt=0$;

(5)(a) 注意到 $\displaystyle\int_{C_1}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}z)}{z^2-1}dz=\int_{C_1}\frac{\frac{\sin(\frac{\pi}{4}z)}{z-1}}{z+1}dz=2\pi i\frac{\sin(-\frac{\pi}{4}z)}{-2}=\frac{\sqrt{2}\pi i}{2}$;

(b) 注意到 $\displaystyle\int_{C_2}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}z)}{z^2-1}dz=\int_{C_2}\frac{\frac{\sin(\frac{\pi}{4}z)}{z+1}}{z-1}dz=2\pi i\frac{\sin(\frac{\pi}{4}z)}{2}=\frac{\sqrt{2}\pi i}{2}$;

(c) 将其分裂为两条周线得到 $\int_{C_3}=\sqrt{2}\pi i$. □

问题 2.2. 设 C 为圆周 $|z|^2=3$, 令 $f(z)=\displaystyle\int_C\frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}d\xi$, 求 $f'(1+i)$.

解答. 由于 $|1+i|<\sqrt{3}$, 只考虑 $1+i$ 的小邻域, 则由 Cauchy 积分公式得到 $f(z)=\displaystyle\int_C\frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}d\xi=2\pi i(3z^2+7z+1)$, 则 $f'(z)=2\pi i(6z+7)$, 从而 $f'(1+i)=-12\pi+26\pi i$. □

问题 2.3. 设 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 上连续, 且对 $\forall 0<r<1$ 有 $\displaystyle\int_{|z|=r}f(z)dz=0$, 证明

$$\int_{|z|=1}f(z)dz=0.$$

解答. 首先由于 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 上连续, 且 $|z|\le 1$ 紧, 则 $|z|\le 1$ 上一致连续. 另一方面, 对 $0<r<1$, 注意到

$$\begin{aligned}\left|\int_{|z|=1}f(z)dz\right|&=\left|\int_{|z|=1}f(z)dz-\frac{1}{r}\int_{|z|=r}f(z)dz\right|\\&=\left|\int_0^{2\pi}f(e^{it})ie^{it}dt-\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}f(re^{it})ire^{it}dt\right|\\&=\left|\int_0^{2\pi}e^{it}(f(e^{it})-f(re^{it}))dt\right|\\&\le\int_0^{2\pi}|f(e^{it})-f(re^{it})|dt,\end{aligned}$$

由于其一致连续性, 任取 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $1-\delta<r<1$ 时有 $|f(e^{it})-f(re^{it})|<\varepsilon$, 则

$$\left|\int_{|z|=1}f(z)dz\right|\le 2\pi\varepsilon,$$

则命题成立. □

问题 2.4. 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 上解析, 且在此内满足 $|f(z)|\le\dfrac{1}{1-|z|}$. 证明*:* 对任意的正整数 n, 有

$$|f^{(n)}(0)|\le(n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

解答. 由于对任意的 $0 < r < 1$, $f(z)$ 在 $|z| \le r$ 上解析, 则知 $|f(z)| \le \frac{1}{1-|z|}$, 由 Cauchy 积分公式我们得知

$$
\begin{aligned}
|f^{(n)}(0)| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}d\xi\right| \le \frac{n!\max\limits_{|z|=r}|f(z)|}{2\pi r^{n+1}}2\pi r \\
&= \frac{n!\max\limits_{|z|=r}|f(z)|}{r^n} \le \frac{n!\frac{1}{1-r}}{r^n} = \frac{n!}{r^n(1-r)},
\end{aligned}
$$

这对任意的 $0<r<1$ 成立, 那么 $|f^{(n)}(0)| \le \inf\limits_{0<r<1}\left(\dfrac{n!}{r^n(1-r)}\right)$. 由均值不等式知

$$
r^n(1-r) = \underbrace{r\cdot\ldots\cdot r}_{n个}\cdot(1-r) = \frac{1}{n}\cdot\underbrace{r\cdot\ldots\cdot r}_{n个}\cdot(n-nr) \le \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1},
$$

则 $|f^{(n)}(0)| \le \dfrac{n!(n+1)^{n+1}}{n^n} = (n+1)!\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, 得到结论. □

问题 2.5. *设 $f(z)$ 在 $|z| \le 1$ 上解析, 且在此内满足 $|f(z)| \le 1$. 证明 $|f'(0)| \le 1$.*

解答. 由 Cauchy 积分公式我们得知

$$
|f'(0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(\xi)}{\xi^2}d\xi\right| \le \frac{1}{2\pi}\frac{\max\limits_{|z|=1}|f(z)|}{1^2}2\pi = \max_{|z|=1}|f(z)| \le 1,
$$

得到结论. □

3 第三次

问题 3.1. *将下列函数展成 z 的幂级数, 并指出展式成立的范围.*

(1) $\dfrac{1}{az+b}$, *其中 a, b 是固定复数且 $b \neq 0$;*

(2) $\displaystyle\int_0^z e^{t^2}dt$; *(3)* $\displaystyle\int_0^z \frac{\sin\xi}{\xi}d\xi$;

(4) $\sin^2 z$; *(5)* $\dfrac{1}{(1-z)^2}$.

解答. (1) 当 $a=0$ 时为常函数, 则展开式就是 $\dfrac{1}{b}$, 下面考虑 $a \neq 0$.

注意到 $\dfrac{1}{az+b} = \dfrac{1}{b}\dfrac{1}{\frac{a}{b}z+1} = \dfrac{1}{b}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{a}{b}z\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^n}{b^{n+1}}z^n$, 当 $\left|\dfrac{a}{b}z\right| < 1$, 即 $|z| < \left|\dfrac{b}{a}\right|$ 时成立;

(2) 对 $|z|<+\infty$ 有

$$\int_0^z e^{t^2}dt=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n!}dt \xlongequal{\text{绝对收敛性}} \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z\frac{t^{2n}}{n!}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!},$$

得到结论;

(3) 对 $|z|<+\infty$ 有 $\dfrac{\sin z}{z}=\dfrac{1}{z}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$, 对其补充 0(可去奇点) 处的定义为 $f(0)=1$, 那么

$$\int_0^z\frac{\sin\xi}{\xi}d\xi=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\xi^{2n}}{(2n+1)!}d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z\frac{(-1)^n\xi^{2n}}{(2n+1)!}d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!},$$

得到结论;

(4) 对 $|z|<+\infty$ 有

$$\sin^2 z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2z=\frac{1}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}z^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}z^{2n}}{(2n)!},$$

得到结论;

(5) 对 $|z|<1$ 注意到 $\dfrac{1}{(1-z)^2}=\left(\dfrac{1}{1-z}\right)'$, 则

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1},$$

得到结论. □

问题 3.2. 设 z_0 是 f 的 m 阶零点, 是 g 的 n 阶零点, 问下列函数在 z_0 处的性质:

(1) $f(z)+g(z)$; *(2)* $f(z)g(z)$; *(3)* $\dfrac{f(z)}{g(z)}$.

解答. 只需要考虑 f,g 在 z_0 处的展开式即可, 显然有:

(1) 当 $m\geq n$, z_0 是 $f+g$ 的 n 阶零点; 当 $m<n$, z_0 是 $f+g$ 的 m 阶零点;

(2) 显然 z_0 是 fg 的 $m+n$ 阶零点;

(3) 当 $m>n$, z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $m-n$ 阶零点; 当 $m=n$, z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的可去极点; 当 $m<n$, z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $n-m$ 阶极点. □

问题 3.3. 设在 $|z|\leq R$ 内解析的函数 f 有 *Taylor* 展开

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots.$$

证明: 当 $0\leq r<R$ 时有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})^2|d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}.$$

解答. 注意到

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})^2|d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^ne^{in\theta}\right|^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^ne^{in\theta}\right)\overline{\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^ne^{in\theta}\right)}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{m,n=0}^{\infty}a_n\overline{a_m}r^{m+n}e^{i(n-m)\theta}\right)d\theta \\
&\xlongequal{\int_0^{2\pi}e^{ikt}dt=0,k\neq 0} \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}|a_n|^2r^{2n}d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n},
\end{aligned}
$$

得到结论. □

问题 3.4. 将下列各函数在指定的去心邻域内展成 *Laurent* 级数, 并指出收敛范围.

(1) $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}, z=i;$

(2) $z^2e^{\frac{1}{z}}, z=0$ 及 $z=\infty;$

(3) $e^{\frac{1}{1-z}}, z=1$ 及 $z=\infty.$

解答. (1) 发现 $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}=\dfrac{1}{(z-i)^2}\dfrac{1}{(2i+z-i)^2}=-\dfrac{1}{4(z-i)^2}\left(\dfrac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}\right)^2$, 用问题 1 的 (5) 得到当 $0<|z-i|<2$ 时有

$$
\frac{1}{(z^2+1)^2}=-\frac{1}{4(z-i)^2}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{-z+i}{2i}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nn(z-i)^{n-3}}{4(2i)^{n-1}},
$$

得到结论;

(2) 只需要在 $0<|z|<\infty$ 展开就可以得到两种情况, 那么

$$
z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2-n}}{n!},
$$

得到结论;

(3) 一方面当 $0<|z-1|<\infty$ 时有

$$
e^{\frac{1}{1-z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-z)^{-n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{(z-1)^n};
$$

另一方面, 考虑到 $\dfrac{1}{1-z}=\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{\frac{1}{z}-1}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^{-n-1}$ 在 $|z|>1$ 成立, 那么考虑 $1<|z|<\infty$, 则

$$
e^{\frac{1}{1-z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\sum_{m=0}^{\infty}z^{-m-1}\right)^n,
$$

得到结论. $\square$

问题 3.5. *判定下列函数的奇点及类别 (包括无穷远点).*

$$(1)\ \frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z};\qquad (2)\ e^{z-\frac{1}{z}};\qquad (3)\ \sin\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2};\qquad (4)\ e^z\cos\frac{1}{z};\qquad (5)\ \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}.$$

引理 3. 若 $f(z),g(z)$ 在 z_0 处解析, 且满足 $f(z_0)=g(z_0)=0,g'(z_0)\neq 0$, 则有

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

引理的证明. 注意到

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)},$$

则得到结论. $\square$

原题解答. (1) 奇点为 $z=2k\pi i,\infty$, 当 $z=0$ 时, 不断用引理 1 得到

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{z-e^z+1}{z(e^z-1)}=\lim_{z\to 0}\frac{1-e^z}{e^z-1+ze^z}$$
$$=\lim_{z\to 0}\frac{-e^z}{2e^z+ze^z}=-\frac{1}{2},$$

则 $z=0$ 为 $\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$ 的可去奇点; 由于 $2k\pi i$ 为其奇点, 则 ∞ 是其的非孤立奇点; 下面考虑 $z=2k\pi i,k\in\mathbb{Z}_{\neq 0}$ 的情况. 注意到 $e^z-1=z+\frac{z^2}{2}+\cdots$, 则 $2k\pi i$ 为 $\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$ 的一阶极点;

(2) 事实上 $0,\infty$ 是奇点. 注意到

$$e^{z-\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(z-\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(-1)^m z^{-2m},$$

则 0 为 $e^{z-\frac{1}{z}}$ 的本质奇点. 根据代换 $z\to\frac{1}{z}$, 得到 ∞ 为 $e^{z-\frac{1}{z}}$ 的本质奇点;

(3) 注意到 $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, 则显然 ∞ 是可去奇点, 而 0 是本质奇点;

(4) 显然 $z=0$ 为 $e^z\cos\frac{1}{z}$ 的本质奇点, 而由代换 $z\to\frac{1}{z}$, 得到 ∞ 为 $e^z\cos\frac{1}{z}$ 的本质奇点;

(5) 奇点为 $z=1,2k\pi i,\infty$. 由问题 4(3) 得到 $z=1$ 为 $\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$ 本质奇点. 当 $z=2k\pi i$ 时考虑 e^z-1 的 Taylor 展开, 得到 $2k\pi i$ 显然为 $\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$ 的一阶极点. 显然 ∞ 为 $\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$ 的非孤立奇点. $\square$

问题 3.6. 设幂级数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 所表示函数 $f(z)$ 在收敛圆周上只有唯一的奇点且是一阶极点 z_0. 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=z_0$.

解答. 不妨设

$$f(z)=\frac{c}{z_0-z}+\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n=\frac{c}{z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_0}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c}{z_0^{n+1}}+b_n\right)z^n,$$

则 $a_n=\frac{c}{z_0^{n+1}}+b_n, c\neq 0$, 由于 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 全纯, 则 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$, 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{c}{z_0^{n+1}}+b_n}{\frac{c}{z_0^{n+2}}+b_{n+1}}=z_0$. □

问题 3.7. 求证*: 在扩充复平面上只有一个一阶极点的解析函数必有形式* $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, *其中* $a,b,c,d\in\mathbb{C}, ad-bc\neq 0$.

解答. 若一阶极点在 $\mathbb{C}$ 内, 则形如 $f(z)=\frac{c}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. 由于 f 在 ∞ 上全纯, 则 $\lim_{z\to\infty} f$ 存在, 那么有 Liouville 定理知 $b_n=0(n>0)$, 则 $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$; 若一阶极点为 ∞, 则 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{1} b_n z^n$, 那 f 是整函数, 则 $b_n=0(n<0)$, 则 $f=az+b$, 完成. □

问题 3.8. 计算*:*

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=99}\frac{1}{(z-2)(z-4)\cdots(z-98)(z-100)}dz.$$

引理 4. *设 C 是一条周线, 区域 D 是 C 的外部 (含 ∞), $f(z)$ 在 D 内解析且连续到 C, 则*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\begin{cases} f(z)-f(\infty), & z\in D \\ 0-f(\infty), & z\notin \overline{D}.\end{cases}$$

引理的证明. 不难证明. □

原题解答. 令 $f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-4)\cdots(z-98)}$, 则由引理得到

$$I=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-}\frac{f(z)}{z-100}dz=f(\infty)-f(100)=-f(100)=-\frac{1}{98!!},$$

得到结论. □

问题 3.9. *(1) 设 a 是 f 的 n 阶零点, 则 a 必为 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 的一阶极点, 且 $\operatorname*{Res}_{z=a}\left(\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right)=n$;*

(2) 设 a 是 f 的 m 阶极点, 则 a 必为 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 的一阶极点, 且 $\operatorname*{Res}_{z=a}\left(\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right)=-m$.

解答. (1) 设 $f(z)=(z-a)^n g(z)$, 则 $g(a)\neq 0$, 且在周围解析, 则

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{n(z-a)^{n-1}g(z)+(z-a)^n g'(z)}{(z-a)^n g(z)}=\frac{n}{z-a}+\frac{g'(z)}{g(z)},$$

则 a 必为 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 的一阶极点, 且 $\operatorname*{Res}_{z=a}\left(\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right)=n$;

(2) 同理设 $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-a)^m}$, 其中 $g(a)\neq 0$, 且在周围解析, 则

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{g'(z)}{g(z)}-\frac{m}{z-a},$$

则 a 必为 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 的一阶极点, 且 $\operatorname*{Res}_{z=a}\left(\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right)=-m$. □

问题 3.10. 计算*:*

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\cos x}dx(a>1)$;

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2}dx$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$;

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx(a>0)$;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+1)(x^4+a^4)}dx(m>0,a>0)$;

(6) 证明: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

解答. (1) 令 $z=e^{ix}$, 则 $\cos x=\dfrac{z+z^{-1}}{2}, dx=\dfrac{dz}{iz}$, 则

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\cos x}dx=\int_{|z|=1}\frac{1}{a+\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{dz}{iz}=\int_{|z|=1}\frac{-2idz}{z^2+2az+1},$$

由于 $\dfrac{-2i}{z^2+2az+1}=\dfrac{-2i}{(z+a+\sqrt{a^2-1})(z+a-\sqrt{a^2-1})}$, 则由留数定理得到

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\cos x}dx=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=-a+\sqrt{a^2-1}}\left(\frac{-2i}{z^2+2az+1}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}},$$

得到结果;

(2) 令 $z=e^{ix}$, 则 $\cos x=\dfrac{z+z^{-1}}{2}, dx=\dfrac{dz}{iz}$, 则

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2}dx=\int_{|z|=1}\frac{-4izdz}{(\sqrt{3}z^2+4z+\sqrt{3})^2},$$

则不难得知 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2}dx=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=-1/\sqrt{3}}\left(\frac{-4iz}{(\sqrt{3}z^2+4z+\sqrt{3})^2}\right)=4\pi$;

(3) 由于 $\dfrac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}=\dfrac{z^2}{(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)}$, 考虑上半圆围道, 则

$$\int_C\frac{z^2}{(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)}dz=2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=i}+\operatorname*{Res}_{z=2i}\right)\left(\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}\right)=\frac{\pi}{3},$$

且 $\displaystyle\int_C\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}dz=\int_{-R}^{+R}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx+\int_{\gamma_R}\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}dz$, 注意到

$$\lim_{R\to+\infty}\left|\int_{\gamma_R}\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}dz\right|=0,$$

则

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=\frac{\pi}{6},$$

得到结果;

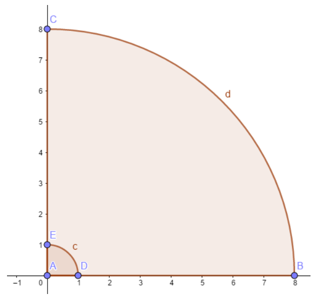
(4) 和 (3) 同理, 得到 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=ai}\left(\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}\right)=\frac{\pi}{2a}$;

(5) 由留数定理显然得到:

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+1)(x^4+a^4)}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+1)(x^4+a^4)}dx\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=i}+\operatorname*{Res}_{z=ae^{\pi i/4}}+\operatorname*{Res}_{z=ae^{3\pi i/4}}\right)\left(\frac{ze^{imz}}{(z^2+1)(z^4+a^4)}\right)\right)\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(2\pi i\left(\frac{ie^{-m}}{2i(1+a^4)}+\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)e^{m\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}}{a^3(ia^2+1)(2\sqrt{2}i-2\sqrt{2})}\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)e^{m\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}}{a^3(1-ia^2)(2\sqrt{2}i+2\sqrt{2})}\right)\right)=\cdots(\text{算不下去了}).\end{aligned}$$

(6) 考虑围道:

则不难得到 $0=\displaystyle\lim_{r\to0,R\to\infty}\int_C\frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}dz=\int_0^{\infty}\frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}dx-\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}i$, 分别取实部和虚部即可得到 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. □



问题 3.11. 证明方程 $e^{z-\lambda}=z(\lambda>1)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内恰有一根, 且为实根.

解答. 令 $f(z)=-z, g(z)=e^{z-\lambda}$, 则在 $|z|=1$ 上有

$$|g(z)|=\frac{|e^z|}{|e^\lambda|}=\frac{|e^{\cos\theta}|}{|e^\lambda|}=|e^{\cos\theta-\lambda}|<e^0=1=|f(z)|,$$

则由 Rouché 定理知在 $|z|<1$ 内 $f+g$ 和 f 有相同零点个数, 则单位圆 $|z|<1$ 内恰有一根. 简单分析得知 $e^{x-\lambda}-x$ 在 $(0,1)$ 上有一根, 则为实根. □

问题 3.12. 证明方程 $e^z-e^\lambda z^n=0(\lambda>1)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内有 n 个根.

解答. 在 $|z|=1$ 上有 $|e^z|=|e^{\cos\theta}|<e<e^\lambda=|-e^\lambda z^n|$, 则由 Rouché 定理知在 $|z|<1$ 内 $e^z-e^\lambda z^n$ 和 $-e^\lambda z^n$ 有相同零点个数, 这就说明了方程 $e^z-e^\lambda z^n=0(\lambda>1)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内有 n 个根. □

问题 3.13. 设 f 在闭曲线 C 内部有一个一阶极点, 此外处处解析且连续到曲线 C, 在 C 上 $|f(z)|\equiv 1$, 设 $a\in\mathbb{C},|a|>1$. 证明: $f(z)=a$ 在曲线内部恰好有一个根.

解答. 由辐角原理得到 $N-1=\dfrac{1}{2\pi}\Delta_c\arg(f(z)-a)$, 由于在 C 上 $|f(z)|\equiv 1$, 则 $|f(z)-a+a|=1<|a|$, 故 $f(z)-a$ 将 C 映到圆盘 $|w+a|<|a|$ 内, 则 $\dfrac{1}{2\pi}\Delta_c\arg(f(z)-a)=0$, 则 $N=1$, 则 $f(z)=a$ 在曲线内部恰好有一个根. □

问题 3.14. 令 C 为 $|z|=1$, 计算 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C\frac{1}{\xi(\xi-z)}d\xi, |z|\neq 1$.

解答. (i) 当 $z=0$ 时, 有 $I=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C\frac{1}{\xi^2}d\xi=\operatorname*{Res}_{\xi=0}\left(\frac{1}{\xi^2}\right)=0$;

(ii) 当 $z\neq 0, |z|<1$ 时, 有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{\xi(\xi-z)}d\xi=\left(\operatorname*{Res}_{\xi=0}+\operatorname*{Res}_{\xi=z}\right)\left(\frac{1}{\xi(\xi-z)}\right)=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z}=0;$$

(iii) 当 $|z|>1$ 时, 有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{\xi(\xi-z)}d\xi=\operatorname*{Res}_{\xi=0}\left(\frac{1}{\xi(\xi-z)}\right)=-\frac{1}{z},$$

得到结论. $\square$

问题 3.15. 设 f 在 $|z|<1$ 上解析, 在 $|z|\leq 1$ 连续. 证明:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} f(\xi)\frac{1-\overline{z}\xi}{\xi-z}d\xi=(1-|z|^2)f(z), |z|<1.$$

解答. 由留数定理得到 $\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} f(\xi)\frac{1-\overline{z}\xi}{\xi-z}d\xi=\operatorname*{Res}_{\xi=z}\left(f(\xi)\frac{1-\overline{z}\xi}{\xi-z}\right)=f(z)(1-|z|^2)$, 则得到结论. $\square$