复分析期中考试

满分100分. 答题时间：8:00-9:40. 闭卷考试.

1. (10') 设$a,b,c\in\mathbb{R}$为常数. 设$f(z)=ay^3+bx^2y+i(x^3+cxy^2)$是复平面$\mathbb{C}$上的解析函数(这里$z=x+iy$，其中$x,y$为实数). 求$a,b,c$的值.

2. (15') 证明：若$|z|<1$，那么

$$\frac{z}{1-z^2}+\frac{z^2}{1-z^4}+\cdots+\frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}+\cdots=\frac{z}{1-z}.$$

3. (10') 设$\mathbb{N}$是正整数集. 集合$S\subseteq\mathbb{N}$被称为“等差数列”，如果

$$S=\{a,\ a+d,\ a+2d,\ \cdots\},$$

其中$a,d\in\mathbb{N}$. 这里d称为S的步长. 求证：$\mathbb{N}$不能被划分为(不少于两个)两两互不相交的不同步长的“等差数列”的并集.

4. (10') 设$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$是整函数且$f$不为常值函数. 设$a\in\mathbb{R}$是实数. 求证：存在$z\in\mathbb{C}$使得$Re\big(f(z)\big)=a$（即$f(z)$的实部等于$a$）.

5. (15') 设$D=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$是单位开圆盘, $\overline{D}=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|\leqslant 1\}$是闭圆盘. 设$f$在$\overline{D}$上连续且处处不为零. 又$f$在$D$上解析. 求证：若当$|z|=1$时总有$|f(z)|=1$, 那么$f$为常值函数.

6. (20') 设$f(z)$在$\overline{D}=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|\leqslant 1\}$上解析. 设$f(0)=i, f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$. 设

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi\quad 以及\quad G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{\overline{f(\xi)}}{\xi-z}d\xi,$$

其中，$\overline{f(\xi)}$表示$f(\xi)$的共轭.

(1) 求$F(0)$的值. (2) 求$G(\frac{1}{2})$的值.

7. (10') 设$w_1,\ldots,w_n\in\overline{D}=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|\leqslant 1\}$. 求证：在单位圆周(即$\overline{D}$的边界)上存在一点$z$, 使得$z$到$w_1,\ldots,w_n$的距离的乘积不小于1.

8. (10') 设$t>0$. 设L_t表示有向直线段$\{1+iy:\ -t\leqslant y\leqslant t\}$(方向从下到上). 设$A>0$为固定实数. 令

$$I_t=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_t}\frac{A^z}{z}dz.$$

判断极限$\lim\limits_{t\to+\infty}I_t$是否存在. 若不存在, 需解释理由. 若存在, 需解释理由且求出极限值. (提示：I_t依赖于A. A不同时, I_t 的极限性质可能不同.)