一、(共10分) 设$a, b, c \in \mathbb{R}$为常数. 设

$f(z) = e^{2x}(2\cos^2 y - a) + be^x(x\cos y - y\sin y) + x^2 - y^2 + ic(e^x\cos y - x)(e^x\sin y - y)$

是复平面$\mathbb{C}$上的解析函数(这里$z = x + iy$, 其中x, y 为实数). 求a, b, c的值.

二、(共10分) 对$r > 0$, 设γ_r为半径为r的上半圆周(逆时针方向). 简记$\gamma = \gamma_1$.

(i) 求证: $\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz\right| \leqslant \pi e$.

(ii) 求证: $\left|\int_{\gamma_r} e^{iz}dz\right| < \pi$.

三、(共20分) 设$f(z)$在$\{z \in \mathbb{C}: |z| \leqslant 3\}$上解析. 设$f(0) = i, f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, f(2) = 2$. 设

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi \quad 以及 \quad G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{\overline{f(\xi)}}{\xi - z}d\xi,$$

其中, $\overline{f(\xi)}$表示$f(\xi)$的共轭.

(i) 求$F(0)$的值. (ii) 求$F(2)$的值. (iii) 求$G(\frac{1}{2})$的值. (iv) 求$G(2)$的值.

四、(共10分) 计算

$$\int_{|z|=2}\frac{1}{z^2+2}dz.$$

五、(共10分) 设$f(z)$在$|z| \leqslant 3$上解析. 已知f在$|z| \leqslant 3$内仅有一个零点z_0且为一阶零点, 其中$|z_0| \leqslant 1$. 求下面积分的值:

$$\int_{|z|=2}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz.$$

六、(共10分) 设$a \in \mathbb{C}$. 设$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$是整函数且对任意的$z \in \mathbb{C}$都有$f(z) \neq a$. 求证: 存在整函数$g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$使得$f(z) = a + e^{g(z)}$.

七、(共20分) 设$g(z)$是关于z的多项式. 考虑关于w的三次方程$w^3 - 3zw + g(z) = 0$.

(i) 当$g(z) = -z^3 - 1$时, 求证: 存在整函数$w = f(z)$是上述三次方程的解

(即求证存在整函数$w = f(z)$使得$f(z)^3 - 3zf(z) + g(z) = 0$).

(ii) 找出所有的多项式$g(z)$满足上述三次方程有三个不同的整函数解

(即找出所有的多项式$g(z)$满足: 存在三个不同的整函数$w = f_1(z), f_2(z), f_3(z)$使得$f_k(z)^3 - 3zf_k(z) + g(z) = 0$对$1 \leqslant k \leqslant 3$都成立).

八、(共10分) 设$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}: Im(z) > 0\}$是上半平面. 设$f: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$是解析函数. 已知$f$在$\mathbb{H}$内存在两个不同的不动点, 即存在不相等的$z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ 使得$f(z_1) = z_1$且$f(z_2) = z_2$. 求证: 在$\mathbb{H}$上恒有$f(z) = z$.