2021 泰山学堂数学取向泛函分析期中考试

张一凡

2021 年 11 月 17 日

1 正题

1. (i) 请详细叙述压缩映射原理的内容;

(ii) 设 X 是赋范线性空间, 请详细叙述 X 为自反空间的定义, 并证明任意一个 Hilbert 空间 H 都是自反空间.

2. 设 X 是实的线性空间, 称子集 $\mathcal{P} \subseteq X$ 为 X 的一个锥, 如果 $\mathcal{P}+\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$, 并且 $t\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}, t \geq 0$. 设 Y 是 X 的一个线性子空间,$\phi: Y \to \mathbb{R}$ 是一个实的线性泛函, 称 ϕ 是 $\mathcal{P}-$ 正的, 如果当 $x \in \mathcal{P} \bigcap Y$ 时,$\phi(x) \geq 0$.

(i) 设 $X = Y + \mathcal{P}$, 其中,Y 为 X 的一个线性子空间, 再令 ϕ 为 Y 上的 $\mathcal{P}-$ 正线性泛函. 试证明:

(*) 对 $\forall x \in X, \exists y \in Y$, 使得 $y - x \in \mathcal{P}$.

(**) 在 X 上定义

$$\rho(x) = \inf_{y \in Y, y-x \in \mathcal{P}} \phi(y),$$

则 ρ 是 X 上的次线性泛函.

(* * *) 存在 $\mathcal{P}-$ 正线性泛函 $\Phi: X \to \mathbb{R}$, 并且 $\Phi|_Y = \phi$.

(ii) 设 $X = \mathbb{R}^2, Y = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}, \mathcal{P} = \{(x,y) : y \geq 0\} \backslash \{(x,0) : x < 0\}$, 在 Y 上定义泛函 $f(x,0) = x$, 那么 f 是 $\mathcal{P}-$ 正的, 但 f 在 X 上不存在任何 $\mathcal{P}-$ 正的线性延拓.

3. (i) 设 X 为赋范线性空间,M 和 N 分别为 X 中的闭子空间和有限维子空间，试证明:$M + N$ 为 X 的闭子空间;

(ii) 设 X, Y 是 Banach 空间, $A: X \to Y$ 是一个有界线性算子. 若存在 Y 的闭子空间 Z, 使得 $Z \bigcap AX = \{0\}$, 且 $Z + AX$ 是闭的, 则 AX 是闭的.

4. 证明 Fourier 变换 $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ 不是满的. $F(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$

5. 设 $\{e_1, e_2, \cdots\}$ 是 Hilbert 空间 H 的一个规范正交基. 试证明: 如果 $\{f_1, f_2, \cdots\}$ 是 H 的一个正交集, 并且满足

$(f_i \neq 0, \forall i)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||e_n - f_n||^2 < \infty,$$

则 $\{f_1, f_2, \cdots\}$ 是 H 的一个完全正交集，即 $\overline{\text{span}}\{f_1, f_2, \cdots\} = \text{H}$.

6. (i) 已知 $\phi \in L^\infty([0,1])$, 考虑乘法算子

$$M_\phi : L^2([0,1]) \to L^2([0,1]), f \mapsto \phi f,$$

试计算 M_ϕ 的算子范数和谱集;

(ii) 在 $l^2(\mathbb{Z})$ 上考虑算子

$$U : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z}), (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}},$$

试计算 U 的算子范数和谱集.

2 附加题

7. 设 $1 \leq p < \infty$, 如果 S 是 $L^p([0,1])$ 的闭子空间, 并且 $S \subseteq L^\infty([0,1])$, 试证明 S 是有限维的.

8. 定义 Volterra 算子 V 如下:

$$V : L^2([0,1]) \to L^2([0,1]), f(x) \mapsto \int_0^x f(t) \ \text{dt}.$$

试计算 V 的算子范数 $||V||$.