复分析期中考试

$$\int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}\,d\theta}{e^{2i\theta}+e^{i\theta}+1}$$

共7题，满分100分．答题时间：14:00-16:00.

1. (20’) 对什么样的闭曲线C(指逐段光滑的闭曲线)，积分

$$\int_C \frac{1}{z^2+z+1}dz$$

有意义且为零？

$(z+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

$$\int_0^1 \frac{z'(t)}{z(t)-z_0}dt \qquad \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

2. (20’) 计算

$$\int_{|z|=\frac{7}{2}} \frac{\left(2(z+1)^3+z+1\right)^4}{(z^4-1)^4(z^3-2)^3(z^2-3)^2(z-4)}dz.$$

$\frac{1}{z_1-z_2}\left(\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}\right)$

3. (20’) 设$a>1$是常数．求关于z的方程$z+e^{-z}=a$在$Re(z)>0$范围内解的个数．

$z+e^{-z}-1=a-1 \qquad z+e^{-z}=a \qquad |z|=|e^{-z}|=e$

4. (20’) 设$f(z)$在点z_0解析且$f'(z_0)\neq 0$．
求证：存在$\delta>0$使得函数f在邻域$\{z:|z-z_0|<\delta\}$内是单射．

$x^2+y^2=e^{-2x}$

5. (8’) 设Ω为复平面$\mathbb{C}$中的有界区域．设$f:\Omega\to\Omega$为解析函数．设存在$z_0\in\Omega$使得$f(z_0)=z_0$且$f'(z_0)=1$．
求证：$f(z)=z$．

$f(z)-z=\sum_{k=2}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$

$=\cancel{z-z_0}$

$z-a+e^{-z}$

6. (6’) 设两个非零复数$\omega_1,\omega_2\in\mathbb{C}$满足$\omega_1/\omega_2\notin\mathbb{R}$．
令$\Lambda=\{m\omega_1+n\omega_2:\ m,n\in\mathbb{Z}\}$．设$\Gamma$是$\{m\omega_1+n\omega_2:\ 0\leqslant a,b\leqslant 1\}$的边界．
设f是亚纯函数，满足：
Γ上没有极点并且(除极点外)对任意的$z\in\mathbb{C}$有$f(z)=f(z+\omega_1)=f(z+\omega_2)$．
求证：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{zf'(z)}{f(z)}dz\in\Lambda.$$

$\frac{h}{(z-z_0)^n} \qquad z_1+z_2-w$

7. (6’) 设$g(z)$是关于z的多项式．考虑关于w的三次方程$w^3-3zw+g(z)=0$．
(i) 当$g(z)=-z^3-1$时，求证：存在整函数$w=f(z)$是上述三次方程的解
(即求证存在整函数$w=f(z)$使得$f(z)^3-3zf(z)+g(z)=0$)．
(ii) 找出所有的多项式$g(z)$满足上述三次方程有三个不同的整函数解
(即找出所有的多项式$g(z)$满足：存在三个不同的整函数$w=f_1(z),f_2(z),f_3(z)$使得$f_k(z)^3-3zf_k(z)+g(z)=0(1\leqslant k\leqslant 3)$都成立)．