

2022 复变期末考试

赵立璐

June 2022

1. 设 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 为常数, 设 $f(z) = ay^3 + bx^2y + i(x^3 + cxy^2)$ 是复平面 \mathbb{C} 上的解析函数 (这里 $z = x + iy$, 其中 x, y 为实数)。求 a, b, c 的值。

2. 计算下列积分

(1)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z(3z+1)} dz$$

(2)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z \sin(z)}{(1-e^z)^3} dz$$

3. 设 f 是一个整函数, $a \in \mathbb{C}$, 并且有 $f(z) \neq a, \forall z \in \mathbb{C}$ 。求证, 存在整函数 g , 使得 $e^{g(z)} + a = f(z), \forall z \in \mathbb{C}$ 。

4. 设 $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ 满足 $f(1) = 1$, 其中 \mathbb{E} 为右半平面 $\{z: \operatorname{Re}(z) > 0\}$ 。求证: $f'(1) \leq 1$ 。

5. f 为单位开圆盘 \mathbb{D} 上一个恒不为 0 的解析函数, 且 $|f|$ 在 $\partial\mathbb{D}$ 上为 1。求证 f 为常数。

6. 设 f 为一个整函数, 且以 ∞ 为本性奇点。令 $A(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$ 。求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(A(r))}{\log(r)} = \infty$$

7. 设 $\overline{D_r} = \{z : |z| \leq r\}$, f 在 $\overline{D_{2022}}$ 上解析, $M \geq 2$. 若 $f(0) = 1$, 且对 $z \in \overline{D_{2022}}$, 有 $|f(z)| \leq M$. 求证: f 在 $\overline{D_{674}}$ 中的零点个数不多于 $\frac{\log M}{\log 2}$.

8. 设 u 是单连通区域 $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ 上的一个调和函数。

(1) 求证: 存在一个 \mathbb{D} 上的一个解析函数 f 以 u 为实部。

(2) 证明: u 不能在 \mathbb{D} 内部取到最大值或最小值。

9. 设 f 为一个 $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ 上的全纯函数, 满足 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, 且 f 为单射, 并有

$$\operatorname{Re}\left(z \frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \leq \frac{4|z| - 2|z|^2}{1 - |z|^2}$$

求证:

(a)

$$|f'(z)| \leq \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3}$$

(b)

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2}$$