2022 泰山学堂数学取向实变期中考试题

张一凡

2022 年 4 月 26 日

1　注意事项

本次考试时间为 120 分钟, 希望大家在答题过程中将答题步骤写的详细, 尽量不要跳步. 同时, 除非特殊说明, 否则下列题目中所考虑的函数皆为复值函数.

2　考试题目

$\lim\limits_{x\to x^-} d_f($　　$\lim\limits_{\alpha\to\alpha^+}$

1. 令 m 表示 Lebesgue 测度,f 为 $\mathbb{R}$ 上的可测函数, 那么, 我们定义 f 在 $[0,\infty)$ 上的分布函数为:

$d_f(\alpha) = m\{x$

$$d_f(\alpha) = m(\{x|\ |f(x)| > \alpha\}).$$

试证明:

$f \quad d_f(x)$

$d_f(\beta) = m\{x|\,|f(x)|>$

(1) d_f 为 $[0,\infty)$ 上的右连续函数.

$f \in L^\infty(\mathbb{R})$

(2) 若 $|f| \le \liminf\limits_{n\to\infty} |f_n|$, 则 $d_f \le \liminf\limits_{n\to\infty} d_{f_n}$.

$f \in L^\infty(\mathbb{R})$

$m\{x|\,|f(x)|>$

2. (1) 设 $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ 且 $f \neq 0$. 若对 $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 都有

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

$\beta - \alpha$

那么，存在实数 r, 使得 $f(x)=e^{irx}$.（提示: 考虑 f 是否在某个区间上的积分不为 0，若这样的区间存在，则考虑 f 与 f 在该区间上的积分的乘积，看看会得到什么结果.）

（2）设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数, 满足

$f \quad f$

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

那么，存在常数 λ, 使得 $f(x)=\lambda x$.

$(\int_{[a,b]} f)^2 \int_{[a,b}$

$$\lim_{r\to 1}\left\| \frac{1}{1-(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i)re^{i\theta}}\right\|_2 \le$$

3. 计算 Lebesgue 积分:$\lim\limits_{r\to 1}[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|1-(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i)re^{i\theta}|^2}\ d\theta]^{\frac{1}{2}}$. 其中,$r\in[0,1)$.

$\int_{[a}$

θ

$f_n(x)$ $\quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} 1-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i$ $\quad f(\theta$

$[\int_{-\pi}^{\pi}(f(\theta$

4. 设 E 为 $\mathbb{R}$ 上的可测集合,$\{f_n\}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的可测函数列. 试证明:

（1）假设 $\{f_n\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处逐点收敛到 f, 且存在 $\mathbb{R}$ 上的非负可测函数列 $\{g_n\}$, 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处收敛到 g，使得:$|f_n|\le g_n$ 对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$ 都成立, 且满足

$\|$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n\ dx=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g\ dx<\infty,$$

$\{f_n\}$

则:

$|f_n|\le g_n$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n\ dx=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f\ dx.$$

$\|(1-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i)re^{i\theta}(\beta)\|_2$.

$d(f_n,f)$

（2）令 $1\le p<\infty,\{f_n\}\subseteq L^p(\mathbb{R}), f\in L^p(\mathbb{R})$, 且 $\{f_n\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处逐点收敛到 f, 那么:

$\lim_{n\to\infty} d(f_n,f)=0$ $\quad \lim_{n\to\infty}$

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L^p(E)}=0\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_{L^p(E)}=\|f\|_{L^p(E)}.$$

$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L^p(E)}=0$ $\quad \lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|$

g_n-f_n $\quad \lim_{n\to\infty} g_n-f_n=g-f$ $\quad \|f_n-f\|$

$(\int_{[a,b]} f\, dx)^2 \leqslant \int_{[a,b]} f^2 d$

5. （1）对 $\forall r \in [0,1)$, 定义 Possion 积分 $P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$, 则:

$$P_r(\theta - t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} = \mathrm{Re}(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}),$$

r

其中,$-\pi \leq \theta, t \leq \pi, z = re^{i\theta}$.

$(e^{it}+z)^2$

$(e^{it}-z)le$

（2）证明:$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\, d\theta = 1$, 并且对 $\forall \delta > 0$, 都有

$\int$ $\int$

$$\lim_{r \to 1} \int_{\pi \geq |\theta| \geq \delta} P_r(\theta)\, d\theta = 0.$$

$\mathrm{Re}(\frac{e^{it}+}{e^{it}-}$

（3）设 $\tilde{f} \in L^2([-\pi, \pi])$, 对单位圆盘中的任意一点 $z = re^{i\theta}$, 我们定义函数

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t) P_r(\theta - t)\, dt.$$

$\mathrm{Re}(\frac{1+re}{1-re}$

则:f 良定义并且为单位圆盘中的调和函数.

（4）证明: 在（3）中的定义 f 为解析函数当且仅当

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t) e^{int}\, dt = 0, \quad \forall n = 1, 2, 3, \cdots.$$

$z + \bar{z}$

$1-e$ $1+$

$r^{|n|} e^{in\theta}$

6. 考虑半直线上的 Lebesgue 平方可积函数空间 $L^2 = L^2[0, \infty)$, 定义映射

$$S : \mathscr{D} \to L^2,\ f \mapsto if'.$$

其中,$\mathscr{D} = \{f \in L^2 |$ 对任意 $t > 0, f$ 在 $[0, t]$ 上绝对连续,$f(0) = 0, f' \in L^2\}$.

（1）证明: 对 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall f, g \in \mathscr{D}$, 有:$\lambda f + \mu g \in \mathscr{D}$ 且 $S(\lambda f + \mu g) = \lambda S(f) + \mu S(g)$. 其中,$\mathbb{C}$ 为复数域,

（2）证明: 若 $\{f_n\} \subsetneq \mathscr{D}$ 为 L^2 中的 Cauchy 列, 并且 $S(f_n)$ 也为 L^2 中的 Cauchy 列, 那么,$\exists f \in \mathscr{D}$, 使得 $\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{L^2} = 0$, $\lim_{n \to \infty} \|S(f_n) - S(f)\|_{L^2} = 0$.

（3）试找出 L^2 中所有满足条件

$$\exists M > 0, \text{s.t.} \left| \int_0^{+\infty} S(f)(t)\bar{g}(t) \ \mathrm{dt} \right| \leq M||f||_{L^2}, \ \forall f \in \mathscr{D}$$

的函数 g.