经典 Fourier 分析笔记

温尊

目录

Chapter 1

Fourier 级数级数基础

事实上我们在此考虑周期函数, 那么这和单位圆 S^1 上的函数密切相关, 事实上定义 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为复合 $\theta \mapsto F(e^{i\theta})$, 这就自然出现了一个周期为 2π 的函数.

1.1 基础定义

定义 1.1.1. 在区间 $[a,b](b-a=L)$ 上的可积函数 f, 定义其 n 次 Fourier 系数为

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)e^{-2\pi inx/L}dx,$$

而 f 的 Fourier 级数定义为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi inx/L}.$$

记 $a_n = \hat{f}(n)$, 则我们写为

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi inx/L}.$$

注 1.1.1. 事实上 Fourier 级数是三角级数的一部分, 其形如 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inx/L}, c_n \in \mathbb{C}$, 若对所有的 $|n| > N$ 使得 $c_n = 0$, 则称其为三角多项式, 其次数为 $|n|$ 使 $c_n \neq 0$ 的最大值.

注 1.1.2. 我们记 f 的 Fourier 级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi inx/L}$ 的部分和为 $S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{2\pi inx/L}$.

1.2 Fourier 级数唯一性

定理 1.2.1. 设 f 是单位圆上的可积函数, 且满足对所有的 $n \in \mathbb{Z}$ 为 $\hat{f}(n) = 0$, 则 $f(\theta_0) = 0$, 其中 θ_0 为 f 的连续点.

证明. 先考虑 f 取实值, 则我们不妨设 f 定义在 $[-\pi, \pi]$, 且 $\theta_0 = 0, f(0) > 0$, 由于连续性, 取 $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ 满足当 $|t| < \delta$ 时有 $f(t) > \frac{f(0)}{2}$. 取 $p(t) = \epsilon + \cos t$, 其中 $\epsilon > 0$ 使得 $|p(t)| < 1 - \frac{\epsilon}{2}$ 在 $\delta \le |t| \le \pi$ 成立. 再取 $0 < \eta < \delta$ 使得 $p(t) \ge 1 + \frac{\epsilon}{2}$ 对 $|t| < \eta$ 成立. 最后, 定义 $p_k(t) = p^k(t)$, 且取 $M \ge 0$ 使得 $|f(t)| \le M$.

一方面由于 $\hat{f}(n) = 0$, 则 $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)p_k(t)dt = 0$; 另一方面我们取 δ 使得 $p(t), f(t) \ge 0$, 则有估计

$$\int_{\eta \le |t| < \delta} f(t)p_k(t)dt \ge 0,$$

且有

$$\left| \int_{\delta \le |t|} f(t)p_k(t)dt \right| \le 2\pi M(1-\epsilon/2)^k, \int_{|t| \le \eta} f(t)p_k(t)dt \ge 2\eta \frac{f(0)}{2}(1+\epsilon/2)^k,$$

则得到

$$\lim_{k \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)p_k(t)dt = \infty,$$

这和条件矛盾, 故成立. 考虑复值, 取 $f(t) = u(t) + iv(t)$, 则不难得到 u, v 满足题意, 故成立. □

推论 1.2.1. 设 f 是单位圆上的连续函数, 且满足 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$, 则 f 的 Fourier 级数一致收敛于 f.

证明. 由于 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$, 则定义 $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$, 则 $g(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(f)(x)$ 是连续的, 考虑 $f - g$, 则 $(\widehat{f-g})(n) = 0$, 运用定理则得到结论. □

推论 1.2.2. 设 $f \in C^k(S^1)$, 则当 $|n| \to \infty$ 有 $\hat{f}(n) = O(1/|n|^k)$.

证明. 运用 k 次分部积分, 我们得到

$$2\pi \hat{f}(n) = \frac{1}{(in)^k} \int_0^{2\pi} f^{(k)}(t)e^{-int}dt,$$

则

$$2\pi |n|^k |\hat{f}(n)| \le \left| \int_0^{2\pi} f^{(k)}(t)e^{-int}dt \right| \le \int_0^{2\pi} |f^{(k)}(t)|dt \le C,$$

则命题成立. □

注 1.2.1. (1) 由这个推论, 我们得知 $\hat{f}'(n) = in\hat{f}(n)$, 且如果 $f \sim \sum a_n e^{int}$, 则不难得到 $f^{(k)} \sim \sum a_n (in)^k e^{int}$;

(2) 运用 Riemann-Lebesgue 引理, 我们可以加强为 $\hat{f}(n) = o(1/|n|^k)$.

1.3 卷积

定义 1.3.1. 考虑两个可积的 2π 周期函数 f, g, 在 $[-\pi, \pi]$ 定义其卷积为

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy.$$

注 1.3.1. 定义 Dirichlet 核 $D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$, 则不难证明 $S_N(f)(x) = (f * D_N)(x)$.

命题 1.3.1. 设 f, g 是两个可积的 2π 周期函数, 则有

(i) $f * (g+h) = (f*g) + (f*h)$;

(ii) $(cf) * g = c(f*g) = f*(cg)$;

(iii) $f * g = g * f$;

(iv) $(f*g)*h = f*(g*h)$;

(v) $f * g \in C^0[-\pi, \pi]$;

(vi) $\widehat{f*g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$.

引理 1.3.1. 设 f 是在单位圆周上可积的函数, 有上界 M, 则存在连续函数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在单位圆上, 且 $\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f_k(x)| \le M$, 且 $\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_k(x)|dx = 0$.

命题的证明. 我们只证明 (v). 首先考虑 f, g 连续的情况, 由 Cantor 引理, 闭区间上连续函数必一致连续, 则对 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $|s-t| < \delta$ 时有 $|g(s) - g(t)| < \epsilon$, 则

$$\begin{aligned}|(f*g)(s) - (f*g)(t)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(y)(g(s-y) - g(t-y))dy\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)||g(s-y) - g(t-y)|dy \le \frac{\epsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)|dy \le M\epsilon,\end{aligned}$$

其中 $|f(y)| \le M$, 则命题对连续函数成立, 下面考虑可积函数.

由引理, 存在函数列 $\{f_k\}, \{g_k\}$ 分别对 f, g 满足引理的条件, 而且我们知道

$$f * g - f_k * g_k = (f - f_k) * g + f_k(g - g_k),$$

考虑

$$
\begin{aligned}
|(f-f_k)*g| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-y)-f_k(x-y)||g(y)|dy\\
&\le \frac{1}{2\pi}\sup_y|g(y)|\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)-f_k(y)|dy \to 0(k\to\infty),
\end{aligned}
$$

另一个同理, 则 f_k*g_k 一致收敛于 $f*g$, 由于 f_k*g_k 连续, 则得到 $f*g$ 也连续. 命题成立. □

1.4 好核

定义 1.4.1. 一族核 $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 定义在单位圆上, 称其为好核, 如果满足:

(i) 对所有的 $n\ge 1$ 满足 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)dx=1$;

(ii) 存在 $M>0$ 使得对所有的 $n\ge 1$ 满足 $\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(x)|dx\le M$;

(iii) 对所有的 $\delta>0$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\int_{\delta\le|x|\le\pi}|K_n(x)|dx=0$.

定理 1.4.1. 设 $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 为好核, 设 f 是圆上的可积函数, 则对 f 的连续点 x, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}(f*K_n)(x)=f(x),$$

如果 f 处处连续, 则极限是一致的.

证明. 由连续性我们得知对 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $|y|<\delta$ 时有 $|f(x-y)-f(x)|<\epsilon$. 另一方面, 由于 $\{K_n(x)\}$ 是好核, 则存在 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时有 $\int_{\delta\le|x|\le\pi}|K_n(x)|dx<\epsilon$, 且假设 $|f|\le M'$, 故

$$
\begin{aligned}
|(f*K_n)(x)-f(x)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}K_n(y)(f(x-y)-f(x))dy\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(y)||f(x-y)-f(x)|dy\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{|y|<\delta}|K_n(y)||f(x-y)-f(x)|dy+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|y|\le\pi}|K_n(y)||f(x-y)-f(x)|dy\\
&< \frac{\epsilon}{2\pi}\int_{|y|<\delta}|K_n(y)|dy+\frac{M'}{\pi}\int_{\delta\le|y|\le\pi}|K_n(y)|dy \le \frac{M\epsilon}{2\pi}+\frac{M'\epsilon}{\pi}=C\epsilon,
\end{aligned}
$$

则命题成立. □

注 1.4.1. 我们已经知道 $S_N(f)(x) = (f * D_N)(x)$, 但遗憾的是 Dirichlet 核并不是好核, 我们下面来证明这个事情.

证明. 我们知道 $D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}}$, 定义 $L_N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(x)|dx$, 则

$$|D_N(x)| = \frac{|\sin((N+\frac{1}{2})x)|}{|\sin\frac{x}{2}|} \geq \frac{|\sin((N+\frac{1}{2})x)|}{|\frac{x}{2}|} = \frac{2|\sin((N+\frac{1}{2})x)|}{|x|},$$

则

$$\begin{aligned}
L_N &\geq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin((N+\frac{1}{2})x)|}{|x|}dx \xlongequal{y=(N+\frac{1}{2})x} \frac{2}{\pi}\int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin y|}{y}dy \\
&= \frac{2}{\pi}\int_1^{N\pi}\frac{|\sin y|}{y}dy + O(1) \geq \frac{2}{\pi}\int_1^{N\pi}\frac{\sin^2 y}{y}dy + O(1) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_1^{N\pi}\frac{1-\cos 2y}{2y}dy + O(1) = \frac{2}{\pi}\int_1^{N\pi}\frac{1}{2y}dy + O(1) \\
&= \frac{1}{\pi}\log N\pi + O(1) = \frac{1}{\pi}\log N + O(1),
\end{aligned}$$

则不难看出 Dirichlet 核不是好核. □

1.5 Cesàro 和 Abel 求和

定义 1.5.1. 设 $s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k, c_k \in \mathbb{C}$, 考虑 $\sigma_N = \frac{s_0+\ldots+s_{N-1}}{N}$, 则称 σ_N 为级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ 的第 N 个 Cesàro 和. 若 $\lim_{N\to\infty}\sigma_N$ 存在趋于 σ, 称级数 $\sum c_n$ 是 Cesàro 意义下收敛于 σ.

考虑 $\sigma_N(f)(x) = \frac{S_0(f)(x)+\ldots+S_{N-1}(f)(x)}{N}$ 和第 N 个 Fejér 核 $F_N(x) = \frac{D_0(x)+\ldots+D_{N-1}(x)}{N}$, 我们有 $\sigma_N(f)(x) = (f * F_N)(x)$, 我们还有:

引理 1.5.1. 我们有 $F_N(x) = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}$, 则 $F_N(x)$ 是好核.

证明. 那这个式子不难证明, 考虑 $NF_N(x) = D_0(x)+\ldots+D_{N-1}(x)$ 和 e^{ix} 一系列等比求和即可. 它是好核的前两条容易证明, 第三条考虑当 $\delta \leq |x| \leq \pi$ 时有 $\sin^2(x/2) \geq c_\delta > 0$, 则 $F_N(x) \leq 1/(Nc_\delta)$. □

定理 1.5.1. 如果 f 是圆上可积函数, 则对 f 的连续点,f 的 Fourier 级数在 Cesàro 求和意义下收敛于 $f(x)$.

注 1.5.1. 这个定理说明在圆周上的连续函数可以被三角多项式一致逼近, 事实上我们还有结论如下.

定理 1.5.2 (Weierstrass 逼近定理). 设 f 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则对 $\epsilon > 0$, 存在多项式 P 使得 $\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| < \epsilon$.

证明. 考虑到圆周上的连续函数可以被三角多项式一致逼近, 那么只需证明 e^{ix} 可以被多项式一致逼近. 这是显然的, 因为 $\sin x, \cos x \in C^{\omega}[a,b]$. □

定义 1.5.2. 设 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k, c_k \in \mathbb{C}$ 称为 Abel 求和意义下收敛于 s, 如果对任意的 $0 \le r < 1$, 级数 $A(r) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k$ 收敛, 且 $\lim_{r\to 1} A(r) = s$.

考虑 Poisson 核定义为 $P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}$, 那么考虑 $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$, 则定义 $A_r(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} a_n e^{inx}$, 不难验证有 $A_r(f)(x) = (f * P_r)(x)$.

引理 1.5.2. 对 $0 \le r < 1$, 我们有 $P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}$, 则 $P_r(x)$ 在当 $r \to 0$ 时是好核.

证明. 事实上 Poisson 核的等式和好核的前两条都容易验证, 而第三条只需考虑当 $1/2 \le r < 1$ 和 $\delta \le |x| \le \pi$ 时有 $1 - 2r\cos x + r^2 \ge c_\delta > 0$ 即可. □

定理 1.5.3. 如果 f 是圆上可积函数, 则对 f 的连续点,f 的 Fourier 级数在 Abel 求和意义下收敛于 $f(x)$.

事实上收敛,Cesàro 可求和与 Abel 可求和有一系列关系:

定理 1.5.4. 考虑级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k, c_k \in \mathbb{C}$, 则收敛蕴含 Cesàro 可求和,Cesàro 可求和蕴含 Abel 可求和. 反过来都有反例.

证明. 收敛蕴含 Cesàro 可求和即 Cauchy 问题的证明, 此处略去; 反之, 考虑 $c_k = (-1)^k$, 则不难得到结论.

Cesàro 可求和蕴含 Abel 可求和: 假设级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k, c_k \in \mathbb{C}$ 是 Cesàro 可求和的, 我们不妨设其 Cesàro 和为 0, 则注意到

$$\sum_{n=1}^{N} c_n r^n = (1-r)\sum_{n=1}^{N} n\sigma_n r^n + N\sigma_N r^{N+1},$$

取 $N \to \infty$, 再 $r \to 1$ 即可. 反例取 $c_k = (-1)^{k-1}k$. □

下面我们考虑在第一类间断点的结果, 均考虑 Riemann 可积的 f.

命题 1.5.1. 设 f 在 t 处为第一类间断点, 则有 $\lim_{r\to 1} A_r(f)(t) = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$.

证明. 这个我们只需注意到 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} P_r(t)dt = \frac{1}{2}$ 和定理 1.4.1 类似. □

命题 1.5.2. 设 f 在 t 处为第一类间断点, 则 f 在 t 处的 Fourier 级数在 Cesàro 意义下可求和于 $\frac{1}{2}(f(t^+)+f(t^-))$.

推论 1.5.1. 设 f 在 t 处为第一类间断点, 则 f 在 t 处的 Fourier 级数收敛, 则收敛于 $\frac{1}{2}(f(t^+)+f(t^-))$.

Chapter 2

Fourier 级数的收敛性

2.1 Fourier 级数的平方平均收敛

那内积空间的定义我们已经在线性代数里面熟知, 我们列出几个重要结论.

命题 2.1.1. 考虑内积空间 $(V, (,))$, 则有

(a)(Pythagorean 定理) 若 X, Y 正交, 则 $\|X+Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2$;

(b)(Cauchy-Schwarz 不等式) 对任意的 $X, Y \in V$, 我们有 $|(X,Y)| \leq \|X\|\|Y\|$;

(c)(三角不等式) 对任意的 $X, Y \in V$, 我们有 $\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$.

证明. (a) 展开 $(X+Y, X+Y)$ 即可;

(b) 若 $\|Y\| = 0$, 则考虑 $t \in \mathbb{R}$ 有 $0 \leq \|X+tY\|^2 = \|X\|^2 + 2t\Re(X,Y)$, 若 $\Re(X,Y) \neq 0$, 则若 $t \to \pm\infty$, 则必然矛盾, 故 $\Re(X,Y) = 0$. 对 $\|X+itY\|$ 会同理得到 $\Im(X,Y) = 0$; 若 $\|Y\| \neq 0$, 设 $c = (X,Y)/(Y,Y)$, 则验证得知 $(X-cY) \perp Y$, 对 $X = X - cY + cY$ 用 Pythagorean 定理即可.

(c) 展开 $(X+Y, X+Y)$, 对交叉项整体用 Cauchy-Schwarz 不等式即可. □

例 2.1.1. 考虑线性空间 $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{(\ldots, a_{-n}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) : a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty\}$, 取向量 $A = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)$ 和 $B = (\ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots)$, 定义内积为 $(A, B) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \overline{b_n}$, 那事实上这是个完备的内积空间, 即 Hilbert 空间.

例 2.1.2. 考虑在 $[0, 2\pi]$ 上的复值 Riemann 可积函数构成的线性空间 $\mathcal{R}$, 取 $f, g \in \mathcal{R}$, 定义内积为 $(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$, 那我们发现这个线性空间严格意义上来说不构成

内积空间, 这是因为 $\|f\| = 0$ 得不到 $f = 0$, 只能得到几乎处处的结果, 那我们事实上考虑一个等价关系 $f \sim g \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)|dt = 0$, 则可以消除这个隐患.

那我们考虑线性空间 $\mathcal{R}$ 内, 事实上假设 $e_n(t) = e^{int}$, 则不难证明 $(e_n, e_m) = \delta_{mn}$. 另一方面我们有 $(f, e_n) = \hat{f}(n)$. 我们考虑 $S_N(f) = \sum_{|n|\leq N} a_n e_n$, 则不难得知对任意的复数 b_n, 我们有 $(f - \sum_{|n|\leq N} a_n e_n) \perp \sum_{|n|\leq N} b_n e_n$.

命题 2.1.2. 取 $f \in \mathcal{R}$, 设 $f \sim \sum a_n e^{inx}$, 则

(i) 我们有 $\|f\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \sum_{|n|\leq N} |a_n|^2$;

(ii)(最佳逼近) 对任意复数 c_n, 我们有 $\|f - S_N(f)\| \leq \|f - \sum_{|n|\leq N} c_n e_n\|$, 等号当且仅当 $c_n = a_n$ 成立.

证明. (i) 根据上面的讨论, 我们只需注意到 $(f - \sum_{|n|\leq N} a_n e_n) \perp \sum_{|n|\leq N} a_n e_n$, 用 Pythagorean 定理和 $\|\sum_{|n|\leq N} a_n e_n\|^2 = \sum_{|n|\leq N} |a_n|^2$;

(ii) 对等式 $f - \sum_{|n|\leq N} c_n e_n = f - S_N(f) + \sum_{|n|\leq N} b_n e_n$ 用 Pythagorean 定理即可. □

定理 2.1.1. 设 $f(x)$ 是圆周上的 Riemann 可积函数, 且 $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$, 则有 Fourier 级数的平方平均收敛

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(x) - S_N(f)(x)\|^2 dx = 0.$$

证明. 若 f 连续, 则对任意的 $\epsilon > 0$, 存在三角多项式 P 使得 $|f - P| < \epsilon$, 由最佳逼近得到 $\|f(x) - S_N(f)(x)\| < \epsilon$.

若 f 只是可积, 则我们可以选取连续函数 g 满足 $\sup_{x\in[0,2\pi]} |g| \leq \sup_{x\in[0,2\pi]} |f| = M$ 且 $\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|dx < \epsilon$, 则我们有

$$\begin{aligned}
\|f - g\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx \\
&\leq \frac{M}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|dx \leq C\epsilon^2,
\end{aligned}$$

然后存在三角多项式 P 使得 $\|g - P\| < \epsilon$, 则得到 $\|f - P\| < C'\epsilon$, 然后用最佳逼近则得到结论. □

注 2.1.1. (1)(Parseval 等式) 若 $f \sim \sum a_n e^{inx}$, 则用定理和 $\|f\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \sum_{|n|\leq N} |a_n|^2$ 得 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \|f\|^2$;

(2)(Bessel 不等式) 对任意的正交族 $\{e_n\}$, 设 $(f, e_n) = a_n$, 已知 $\|f\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \sum_{|n|\leq N} |a_n|^2$, 则得到 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \leq \|f\|^2$, 则不难看出 Parseval 等式是 Bessel 不等式的一种取等情况.

定理 2.1.2 (Riemann-Lebesgue 引理). 若 f 在圆周上可积, 则 $\lim_{|n|\to\infty}\hat{f}(n)=0$.

证明. 由 Bessel 不等式或 Parseval 等式知级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|^2$ 收敛, 则成立. □

引理 2.1.1. 设 F,G 在圆周上可积, 且 $F\sim\sum a_ne^{inx}, G\sim\sum b_ne^{inx}$, 则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(x)\overline{G(x)}dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\overline{b_n}.$$

证明. 我们熟知 Hermite 空间内有 $(F,G)=\frac{1}{4}(\|F+G\|^2-\|F-G\|^2+i(\|F+iG\|^2-\|F-iG\|^2))$ 和 Parseval 等式即可. □

2.2 Fourier 级数的逐点收敛基础理论

定理 2.2.1. 假设 f 在圆周上可积, 且在 t_0 点可微, 则 $\lim_{N\to\infty}S_N(f)(t_0)=f(t_0)$.

证明. 令 $F(t)=\frac{f(t_0-t)-f(t_0)}{t}, t\neq 0, |t|\leq\pi$, 且 $F(0)=-f'(t_0)$. 由可微性不难得知 F 在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积, 则

$$\begin{aligned}S_N(f)(t_0)-f(t_0)=(f*D_N)(t_0)-f(t_0)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t_0-t)D_N(t)dt-f(t_0)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t_0-t)-f(t_0))D_N(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)tD_N(t)dt,\end{aligned}$$

而我们知道 $tD_N(t)=\frac{t}{\sin(t/2)}\sin((N+1/2)t)$, 且 $\frac{t}{\sin(t/2)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, 那么展开 $\sin((N+1/2)t)$, 用 Riemann-Lebesgue 引理知命题成立. □

注 2.2.1. 将条件改成 Lipschitz 条件, 或者 $\alpha=1$ 的 Hölder 条件均成立.

定理 2.2.2. 设 f,g 是圆周上的可积函数, 如果对某个 t_0, 存在开区间 $I\ni t_0$ 使得 $f(t)=g(t), t\in I$, 则 $\lim_{N\to\infty}(S_N(f)(t_0)-S_N(g)(t_0))=0$.

推论 2.2.1. 设 $f\in C^k(S^1)$, 则当 $|n|\to\infty$ 有 $\hat{f}(n)=o(1/|n|^k)$.

证明. 运用 k 次分部积分, 我们得到

$$2\pi\hat{f}(n)=\frac{1}{(in)^k}\int_0^{2\pi}f^{(k)}(t)e^{-int}dt,$$

则由 Riemann-Lebesgue 引理知

$$2\pi|n|^k|\hat{f}(n)| \le \left|\int_0^{2\pi} f^{(k)}(t)e^{-int}dt\right| \to 0,$$

则命题成立. □

2.3 Fourier 系数反问题

事实上由 Riemann-Lebesgue 引理, 我们知道如果 f 可积, 则 $\hat{f}(n) \to 0$, 那考虑反问题, 是否对任何趋于零的序列 $\{a_n\}$ 都是某个可积函数的 Fourier 系数呢?

假设 f 在单位圆可积, 且 $\hat{f}(0) = 0$, 考虑 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 则 F 连续且周期为 2π.

命题 2.3.1. 设 f 在单位圆可积, 且 $\hat{f}(0) = 0$, 则连续周期函数 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 有

$$\hat{F}(k) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} xf(x)dx, & k = 0 \\ \frac{1}{ik}\hat{f}(k), & k \neq 0 \end{cases}$$

证明. 这由 Fubini 定理不难计算得到. □

那么考虑 Fejér 核 F_N, 则不难得知 $\lim_{N\to\infty}(F_N * F)(x) \rightrightarrows F$, 而且 $(F_N * F)(x) = \sum_{|k|\le N}\left(1 - \frac{|k|}{N}\right)\hat{F}(k)e^{ikx}$, 则

$$\begin{aligned}(F_N * F)(x) &= \sum_{|k|\le N}\left(1 - \frac{|k|}{N}\right)\hat{F}(k) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} xf(x)dx - i\sum_{1\le|k|\le N}\frac{\hat{f}(k)}{k} + \frac{i}{N}\sum_{1\le k\le N}\hat{f}(k) - \frac{i}{N}\sum_{-N\le k\le 1}\hat{f}(k),\end{aligned}$$

那么令 $N \to \infty$, 且 $F(0) = 0$, 我们得到

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{1\le|k|\le N}\frac{\hat{f}(k)}{k}\right) = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} xf(x)dx,$$

这表明这样的 $\{\frac{\hat{h}(k)}{k}\}$ 有这种可求和性.

命题 2.3.2 (Fatou). 定义数列 $\{a_k\}$ 为

$$a_k = \begin{cases} 0, & |k| \le 1 \\ \frac{1}{2i\log k}, & k \ge 2 \\ \frac{-1}{2i\log|k|}, & k \le -2 \end{cases}$$

则不存在圆周上可积的函数 f 使得 $a_k = \hat{f}(k)$.

证明. 我们发现

$$\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} xf(x)dx = \sum_{1\le|k|\le N} \frac{a_k}{k} = \frac{1}{i}\sum_{2\le k\le N} \frac{1}{k\log k} \sim \frac{1}{i}\log\log N \to \infty,$$

矛盾! □

2.4 du Bois-Reymond 反例及 Fourier 级数收敛著名结论

命题 2.4.1 (du Bois-Reymond). 存在 $f \in C^0(S^1)$ 使得 $\{S_N(f)(x)\}_{N\ge1}$ 在 $x = 0$ 处发散.

证明. 不难证明 $|\sum_{1\le|k|\le N} \frac{e^{ikx}}{k}| \le C$, 我们定义波包函数 $W_K(x) = e^{i(2K)x}\sum_{1\le|k|\le K} \frac{e^{ikx}}{k}$ 和 $W_K^-(x) = e^{i(2K)x}\sum_{-K\le k\le -1} \frac{e^{ikx}}{k}$, 则不难得知如果 $n \notin [K, 3K]$, 则 $\widehat{W}_K(n) = 0$, 而如果 $n \notin [K, 2K]$, 则 $\widehat{W^-}_K(n) = 0$. 那我们依次选取 K_ℓ 使得 $K_\ell > 3K_{\ell-1}$, 这样使得 $W_K(x), W_K^-(x)$ 在频率空间上面的支集两两不相交.

现在我们知道级数 $f(x) = \sum_{\ell=1}^\infty \frac{1}{\ell^2} W_{K_\ell}(x)$ 一致收敛, 则 f 连续. 考虑部分和

$$S_{2K_{\ell_0}}(f)(x) = \frac{1}{\ell_0^2} W_{K_{\ell_0}}^-(x) + \sum_{\ell=1}^{\ell_0-1} \frac{1}{\ell^2} W_{K_\ell}(x),$$

由于 $W_{K_\ell}(x)$ 有界, 则后面那一项有界, 我们只考虑第一项. 事实上

$$\frac{1}{\ell_0^2} W_{K_{\ell_0}}^-(0) = \frac{1}{\ell_0^2}\sum_{k=-1}^{-K_{\ell_0}} \frac{1}{k} \sim \frac{\log(K_{\ell_0})}{\ell_0^2},$$

取 $K_\ell = 3^{\ell^3}$, 则发散. □

定理 2.4.1. 给定单位圆上的可积函数 f 和一点 x_0, 若满足 f 在 x_0 处的左右极限存在, 且存在 $\delta > 0$ 使得 $|\int_0^\delta \frac{|f(x_0-t)-f_-(x_0)|}{t}dt| + |\int_0^\delta \frac{|f(x_0+t)-f_+(x_0)|}{t}dt| < \infty$, 则 $\{S_N(f)(x)\}$ 在 x_0 收敛, 且收敛于 $\frac{f_+(x_0)+f_-(x_0)}{2}$.

证明. 注意到

$$S_N(f)(x_0) - \frac{f_+(x_0)+f_-(x_0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(y)(f(x_0-y) - \frac{1}{2}(f_-(x_0)+f_+(x_0)))dy$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} D_N(y)(f(x_0-y) - f_-(x_0) + f(x_0+y) - f_+(x_0))dy$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin((N+1/2)y)\frac{y}{\sin((1/2)x)}\frac{f(x_0-y) - f_-(x_0) + f(x_0+y) - f_+(x_0)}{y}dy,$$

运用 Riemann-Lebesgue 定理即可. □

推论 2.4.1. 设 f 在单位圆上分段一阶连续可导, 则对任意的 x_0, 都有 $\{S_N(f)(x)\}$ 在 x_0 收敛, 且收敛于 $\frac{f_+(x_0)+f_-(x_0)}{2}$.

定理 2.4.2 (Dini). 给定单位圆上的可积函数 f 和一点 x_0, 若满足

$$\left|\int_0^{\pi} \frac{|f(x_0-t)+f(x_0+t)-2f(x_0)|}{t}dt\right| < \infty,$$

则 $\{S_N(f)(x)\}$ 在 x_0 收敛, 且收敛于 $f(x_0)$.

证明. 和上述定理类似, 留作练习. □

推论 2.4.2. 对 $\alpha \in (0,1]$, 设 f 在单位圆上是 α-Hölder 连续的, 则对任意的 x_0, 都有 $\{S_N(f)(x)\}$ 在 x_0 收敛, 且收敛于 $f(x_0)$.

证明. 运用 α-Hölder 连续的定义验证 Dini 定理的条件, 并用之. □

注 2.4.1. 这个推论的收敛不一定一致, 但是事实上当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时, 是一致的.

Chapter 3

Fourier 级数级数的应用——等分布问题

定义 3.0.1. 考虑数列 $\xi_n \in [0,1)$ 称为等分布的, 如果对任意的 $(a,b) \in [0,1)$ 都有

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|\{1 \le n \le N : \xi_n \in (a,b)\}|}{N} = b - a.$$

命题 3.0.1. 如果 $\xi_n \in [0,1)$ 等分布, 则在其中稠密. 反之不行.

证明. 反证法, 如果不稠密, 则存在 $(a,b) \in [0,1)$ 使得 $\{\xi_n\} \cap (a,b) = \emptyset$, 则 $\frac{|\{1 \le n \le N : \xi_n \in (a,b)\}|}{N} = 0$, 矛盾. 反之, 我们考虑 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $[0,1)$ 中有理数的任意排列, 那我们取当 n 为偶数时 $\xi_n = r_{n/2}$, 当 n 是奇数时 $\xi_n = 0$. 毫无疑问 $\{\xi_n\}$ 是稠密的, 但不是等分布的. □

例 3.0.1. 对有理数 q, 数列 $\{\{kq\}\}_{k=1}^{\infty}$ 不等分布.

引理 3.0.1. 设 f 是连续周期为 1 的函数, 设 γ 是无理数, 则

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) = \int_0^1 f(x)dx.$$

证明. 我们首先假设 $f = e^{2\pi ikx}$, 那么不难得知 $\int_0^1 f(x)dx = 0$, 且 $1 \neq e^{2\pi ik\gamma}$, 有

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) = \lim_{N\to\infty} \frac{e^{2\pi ik\gamma}}{N}\frac{1-e^{2\pi ikN\gamma}}{1-e^{2\pi ik\gamma}} = 0,$$

故成立, 则不难得知若 f 是三角多项式的话, 命题也成立.

取 $\epsilon > 0$, 考虑 f 是连续周期为 1 的函数, 存在三角多项式 P 使得 $\sup|f(x)-P(x)| < \epsilon$, 那么对足够大的 N, 我们有

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(n\gamma) - \int_0^1 P(x)dx\right| < \epsilon,$$

那么我们有

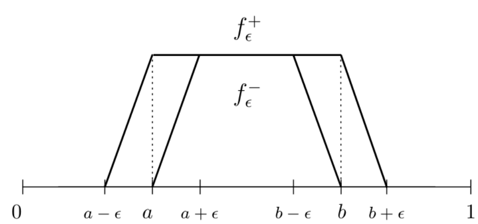
$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) - \int_0^1 f(x)dx\right| \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|f(n\gamma)-P(n\gamma)| + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(n\gamma) - \int_0^1 P(x)dx\right| + \int_0^1 |P(x)-f(x)|dx < 3\epsilon,$$

故命题成立. □

考虑 $\{\{n\gamma\}\}_{n=1}^{\infty}$ 的等分布问题相当于考虑 $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\chi_{(a,b)}(n\gamma) = \int_0^1 \chi_{(a,b)}(x)dx$, 而通过实分析的学习我们知道建立积分论的时候是从集合的测度过渡到简单函数, 再过渡到一般的可积函数, 由此我们考虑上述引理.

定理 3.0.1. *若 γ 是无理数, 则 $\{\{n\gamma\}\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1)$ 上等分布.*

证明. 考虑连续周期为 1 的函数 $f_\epsilon^+, f_\epsilon^-$ 逼近 $\chi_{(a,b)}(x)$ 如图所示



那么 $f_\epsilon^- \leq \chi_{(a,b)}(x) \leq f_\epsilon^+$, 且 $b-a-2\epsilon \leq \int_0^1 f_\epsilon^-(x)dx, \int_0^1 f_\epsilon^+(x)dx \leq b-a+2\epsilon$. 我们设 $S_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\chi_{(a,b)}(n\gamma)$, 则 $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_\epsilon^-(n\gamma) \leq S_N \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_\epsilon^+(n\gamma)$. 那么我们有 $b-a-2\epsilon \leq \liminf_{N\to\infty} S_N \leq \limsup_{N\to\infty} S_N \leq b-a+2\epsilon$, 则命题成立. □

推论 3.0.1. 设 f 是可积周期为 1 的函数, 设 γ 是无理数, 则

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) = \int_0^1 f(x)dx.$$

证明. 考虑 $f_U(x) = \sup_{x_{j-1}\le y\le x_j} f(y), x \in [x_{j-1}, x_j]$ 和 $f_L(x) = \inf_{x_{j-1}\le y\le x_j} f(y), x \in [x_{j-1}, x_j]$, 对二者用定理即可. □

定理 3.0.2 (Weyl 等分布判别准则). 实数 $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1)$ 上等分布当且仅当对任意整数 $k \neq 0$ 都有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k\xi_n} = 0.$$

Chapter 4

$\mathbb{R}$ 上的 Fourier 变换

4.1 Fourier 变换基础

定义 4.1.1. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数称之为适度减少的, 如果 f 是连续的, 且存在 $A > 0$ 使得 $|f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2}$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$ 上成立.

注 4.1.1. 1. 我们记 $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 上适度减少的函数组成的线性空间;

2. 事实上可以定义成 $|f(x)| \leq \frac{A}{1+x^{1+\epsilon}}, \epsilon > 0$, 这里取 $\epsilon = 1$ 只是为了方便.

现在考虑 $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, 定义 $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_{[-N,N]} f(x)dx$. 假设 $I_N = \int_{[-N,N]} f(x)dx$, 不难证明 $\{I_N\}$ 是 Cauchy 列, 则也得到 $\lim_{N\to\infty} \int_{|x|\geq N} f(x)dx = 0$.

命题 4.1.1. 对于 $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 中函数的积分 $\int_{\mathbb{R}}$ 满足线性, 平移不变性和连续性.

定义 4.1.2. 设 $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, 对 $\xi \in \mathbb{R}$, 定义其 Fourier 变换为

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx.$$

命题 4.1.2. 设 $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, 则 $\hat{f}$ 连续且 $\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

证明. 考虑 $|\hat{f}(\xi') - \hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)||e^{-2\pi ix\xi'} - e^{-2\pi ix\xi}|dx$, 由 $e^{-2\pi ix\xi}$ 连续和 $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, 不难得知连续性. 另一方面注意到 $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(f(x) - f(x - 1/(2\xi)))e^{-2\pi ix\xi}dx$ 和 f 一致有界性得到结论. □

定义 4.1.3. 定义 $\mathbb{R}$ 上的 Schwartz 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 是包含所有无穷可微, 且 $\sup_{x\in\mathbb{R}}|x|^k|f^{(\ell)}(x)|<\infty$ 对所有的 $k,\ell\geq 0$ 成立 (称为速降函数).

注 4.1.2. 不难证明 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 是复线性空间, 且如果 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则 $f'(x), xf(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

例 4.1.1. (1) Gauss 函数定义为 $f(x)=e^{-x^2}$, 且 $f(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$;

(2) Bump 函数也在 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 内.

注 4.1.3. 在此笔记中我们把 $\mathscr{F}[f(x)](\xi):=\hat{f}(\xi)$ 记为 $f(x)$ 的 Fourier 变换.

命题 4.1.3. 设 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则

(1) 设 $h\in\mathbb{R}$, 则 $\mathscr{F}[f(x+h)](\xi)=\hat{f}(\xi)e^{2\pi ih\xi}$;

(2) 设 $h\in\mathbb{R}$, 则 $\mathscr{F}[f(x)e^{-2\pi ixh}](\xi)=\hat{f}(\xi+h)$;

(3) 设 $\delta>0$, 则 $\mathscr{F}[f(\delta x)](\xi)=\delta^{-1}\hat{f}(\delta^{-1}\xi)$;

(4) 我们有 $\mathscr{F}[f'(x)](\xi)=2\pi i\xi\hat{f}(\xi)$;

(5) 我们有 $\mathscr{F}[-2\pi ixf(x)](\xi)=\frac{d\hat{f}(\xi)}{d\xi}$.

证明. (1)(2)(3) 显然,(4) 用分部积分显然, 下面考虑 (5).

对 $\epsilon>0$, 则存在 N 使得 $\int_{|x|\geq N}|f(x)|dx\leq\epsilon$ 且 $\int_{|x|\geq N}|xf(x)|dx\leq\epsilon$, 且对 $|x|\leq N$, 存在 h_0 使得当 $|h|<h_0$ 时有 $|\frac{e^{-2\pi ixh}-1}{h}+2\pi ix|\leq\frac{\epsilon}{N}$, 则

$$\begin{aligned}\left|\frac{\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)}{h}-(\widehat{-2\pi ixf})(\xi)\right|&=\left|\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-2\pi ix\xi}\left(\frac{e^{-2\pi ixh}-1}{h}+2\pi ix\right)dx\right|\\ &\leq\int_{[-N,N]}\left|f(x)e^{-2\pi ix\xi}\left(\frac{e^{-2\pi ixh}-1}{h}+2\pi ix\right)\right|dx+C\epsilon\leq C'\epsilon,\end{aligned}$$

则命题成立. □

推论 4.1.1. 若 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则 $\hat{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

接下来考虑 Gauss 函数 $f(x)=e^{-ax^2}$, 为了方便, 我们取 $a=\pi$, 则显然 $\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi x^2}dx=1$. 而且我们还有

定理 4.1.1. 若 $f(x)=e^{-\pi x^2}$, 则 $\hat{f}(\xi)=f(\xi)$.

证明. 考虑 $f'(x)=-2\pi xf(x)$, 我们用上面的性质不难得到 $(\hat{f})'(\xi)=-2\pi\xi\hat{f}(\xi)$, 从而得到结论. □

现在考虑 $K_\delta(x)=\delta^{-1/2}e^{-\pi x^2/\delta}$, 当 $\delta\to 0$, 不难验证这是一族好核.

推论 4.1.2. 若 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则 $\lim_{\delta\to 0}(f*K_\delta)(x)\rightrightarrows f(x)$.

证明. 不难证明 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续, 则对 $\epsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$ 使得当 $|x-y| < \eta$ 时有 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, 则由于 K_δ 是好核, 且 f 一致连续, 则

$$
\begin{aligned}
|(f * K_\delta)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} K_\delta(t)(f(x-t) - f(x))dt \right| \\
&\leq \left(\int_{|t|>\eta} \right) \left(\int_{|t|\leq\eta} \right) K_\delta(t)|f(x-t) - f(x)|dt < C\epsilon,
\end{aligned}
$$

则命题成立. □

命题 4.1.4 (乘积原理). 若 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则 $\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g(x)dx$.

证明. 考虑函数 $F(x,y) = f(x)g(y)e^{-2\pi ixy}$ 和 $F_1(x) = f(x)\hat{g}(x), F_2(x) = \hat{f}(x)g(x)$, 然后用 Fubini 定理即可得到结论. □

定理 4.1.2 (Fourier 反演). 若 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则

$$
f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi.
$$

证明. 考虑 $G_\delta(x) = e^{-\pi\delta x^2}$, 则 $\widehat{G_\delta}(\xi) = K_\delta(\xi)$, 由乘积原理得到

$$
(f * K_\delta)(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)K_\delta(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)G_\delta(\xi)d\xi,
$$

则取 $\delta \to 0$, 则得到 $f(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)d\xi$. 那把这个运用在 $F(y) = f(y+x)$, 则得到

$$
f(x) = F(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{F}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi,
$$

则得到结论. □

注 4.1.4. 事实上得到映射 $\mathscr{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 为 $f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx$ 和 $\mathscr{F}^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 为 $g \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{2\pi ix\xi}d\xi$, 则 $\mathscr{F} \circ \mathscr{F}^* = \mathrm{id}, \mathscr{F}^* \circ \mathscr{F} = \mathrm{id}$, 则 Fourier 变换 $\mathscr{F}$ 是双射, 其逆变换 $\mathscr{F}^*$ 由 Fourier 反演给出.

命题 4.1.5. 若 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则

(i) $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$;

(ii) $f * g = g * f$;

(iii) $(\widehat{f * g})(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$.

证明. (i) 考虑到 $\sup_x |x|^k |g(x-y)| \le A_k(1+|y|)^k$, 则 $\sup_x |x^k||(f*g)(x)| \le A_k \int_{\mathbb{R}} |f(y)|(1+|y|^k)dy \le M_k$, 则对 $\left(\frac{d}{dx}\right)^\ell g$ 用这个, 我们得到

$$\sup_x |x|^k \left| \left(\frac{d}{dx}\right)^\ell (f*g)(x) \right| = \sup_x |x|^k \left| \left(f * \left(\frac{d}{dx}\right)^\ell g\right)(x) \right| \le M_{k,\ell},$$

则 (i) 成立.

(ii) 这显然;

(iii) 考虑 $F(x,y) = f(y)g(x-y)e^{-2\pi i x\xi}$ 和 $F_1(x) = (f*g)(x)e^{-2\pi i x\xi}$, $F_2(x) = f(y)e^{-2\pi i y\xi}\hat{g}(\xi)$ 用 Fubini 则得到 $\int F_1 = \int F_2$, 得到结论. □

那我们现在给 Schwartz 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 赋予 Hermite 内积 $(f,g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx$, 关联范数 $\|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$. 则有

定理 4.1.3 (Plancherel). *若* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则 $\|\hat{f}\| = \|f\|$.

证明. 定义 $\mathfrak{F}(x) = \overline{f(-x)}$, 则

$$\hat{\mathfrak{F}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}(x)e^{-2\pi i x\xi}dx = \overline{\int_{\mathbb{R}} f(-x)e^{2\pi i x\xi}dx} = \overline{\hat{f}(\xi)},$$

考虑 $h = (f * \mathfrak{F})(x)$, 则 $h(0) = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx$, 且

$$\hat{h}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathfrak{F}(x-t)dt \right) e^{-2\pi i x\xi}dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(t)e^{-2\pi i t\xi}\mathfrak{F}(x-t)e^{-2\pi i(x-t)\xi}dxdt$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} f(t)e^{-2\pi i t\xi}\mathfrak{F}(u)e^{-2\pi i u\xi} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dudt = \hat{f}(\xi)\overline{\hat{f}(\xi)} = |\hat{f}(\xi)|^2,$$

则由 Fourier 反演我们得到

$$\|f\| = f(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\hat{f}\|,$$

从而得到结论. □

注 4.1.5. 可以把上面的卷积性质, 乘积原理, Fourier 反演和 Plancherel 定理推广到 $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, 这就把适用范围拓广.

4.2 Poisson 可求和定理

考虑 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 定义 $F_1(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$, 由于 f 速降, 则 F_1 绝对收敛, 且在闭区间上一致收敛, 则其连续. 不难得知 $F_1(x)$ 的周期为 1, 我们称 F_1 是 f 的周期化.

另一方面, 考虑 Fourier 反演 $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi$ 的离散形式 $F_2(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}$, 这也是周期为 1 的函数.

定理 4.2.1 (Poisson 可求和定理). 若 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}.$$

证明. 注意到

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)\right) e^{-2\pi imx}dx &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n)e^{-2\pi imx}dx \\ = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(y)e^{-2\pi imy}dy &= \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-2\pi imy}dy = \hat{f}(m),\end{aligned}$$

则二者 Fourier 系数相等, 故结论成立. □

注 4.2.1. 那是事实这个定理也推广到 $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.