ODE 复习

刘晓龙

问题 1 (张祥 P20 页例)**.** 设 $f(y)$ 在 $|y-a|\le\sigma$, 且 $y=a$ 为 $f(y)$ 唯一零点, 则微分方程 $y'(x)=f(y)$ 从 $y=a$ 上每一点出发的解都唯一当且仅当 $\left|\int_a^{a\pm\sigma}\frac{dy}{f(y)}\right|=\infty$.

解答. 考虑必要性, 取 (x_0,y_0) 是 $0<|y-a|<\sigma$ 中的任一点, 不妨设 $y_0>a$, 则由 Peano 定理知过 (x_0,y_0) 必有一个解 $\phi(x)$, 由于 $y=a$ 为 $f(y)$ 唯一零点, 则不妨设 $y\in(a,a+\sigma)$ 上有 $f(y)>0$, 则 $\phi(x)$ 随着 x 从 x_0 减小而减小. 但是过 $y=a$ 上每一点出发的解都唯一, 则 x 减小的过程中 $\phi(x)>a$, 那设 $b=\lim\limits_{x\to-\infty}\phi(x)\ge a$, 则不难得知 $\int_b^{y_0}\frac{dy}{f(y)}=\int_{-\infty}^{x_0}\frac{y'(x)}{f(y)}dx=\int_{-\infty}^{x_0}dx=\infty$, 则 $\int_a^{a+\sigma}\frac{dy}{f(y)}=\infty$, 则得到结论.

考虑充分性, 假设方程过 (x_0,a) 有另一个解 $\psi(x)$, 则有两个解 $y=a, y=\psi(x)$, 那么存在 $x_1\in J$ 使得 $y_1=\psi(x_1)\in(a-\sigma)\cup(a+\sigma)$, 则有 $\left|\int_{a-\sigma}^{y_1}\frac{dy}{f(y)}\right|<\infty$ 或者 $\left|\int_{y_1}^{a+\sigma}\frac{dy}{f(y)}\right|<\infty$, 则有 $\infty=\left|\int_a^{y_1}\frac{dy}{f(y)}\right|=\left|\int_{x_0}^{x_1}dx\right|<\infty$, 矛盾. □

定理 1 (一阶线性微分方程解)**.** 方程 $y'+p(x,\lambda)y=q(x,\lambda)$ 的通解为

$$y(x,\lambda,c)=e^{-\int p(x,\lambda)dx}\left(C+\int q(x,\lambda)e^{\int p(x,\lambda)dx}dx\right).$$

方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的通解的定积分形式为

$$y(x)=Ce^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}+\int_{x_0}^x q(s)e^{-\int_s^x p(t)dt}ds.$$

问题 2 (丁同仁习题 2.3.3)**.** 设 $y=\varphi(x)$ 满足微分不等式 $y'+a(x)y\le0,(x\ge0)$, 求证 $\varphi(x)\le\varphi(0)e^{-\int_0^x a(s)ds}$.

解答. 考虑不等式 $\varphi'(x)+a(x)\varphi(x)\le0$, 得到 $\varphi'(x)e^{\int_0^x a(s)ds}+a(x)\varphi(x)e^{\int_0^x a(s)ds}\le0$, 两边对 0 到 x 积分即可. □

问题 3 (丁同仁习题 2.3.5). *考虑方程 $y'+p(x)y=q(x)$, 其中 p,q 以 $\omega>0$ 为周期的连续函数. 证明:*

(1) 若 $q(x)\equiv 0$, 则方程的非零解以 ω 为周期当且仅当 $\overline{p}=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega p(x)dx=0$;

(2) 若 $q(x)$ 不恒为零, 则方程有唯一的 ω 周期解当且仅当 $\overline{p}\neq 0$.

解答. (1) 解为 $\phi(x)=Ce^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}$, 考虑 $\phi(x+\omega)=\phi(x)$ 即可;

(2) 考虑通解 $\phi(x)=Ce^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}+\int_{x_0}^x q(s)e^{-\int_s^x p(t)dt}ds$, 我们只需要选取 c 使得 $\phi(x+\omega)=\phi(x)$. 根据下面的引理, 我们只需考虑 $\phi(\omega)=\phi(0)$ 即可解出这样唯一的 c, 然后不难看出 c 存在当且仅当 $\overline{p}\neq 0$. □

问题 4 (周期解的一个引理). *考虑方程 $y'+p(x)y=q(x)$, 其中 p,q 以 $\omega>0$ 为周期的连续函数, 则解 $\phi(x)$ 以 ω 为周期当且仅当存在某个点 a 使得 $\phi(a)=\phi(a+\omega)$.*

解答. 只需考虑存在某个点 a 使得 $\phi(a)=\phi(a+\omega)$ 的情况. 由于 p,q 以 $\omega>0$ 为周期的连续函数, 则显然 $\phi(x+\omega)$ 也是一个解, 那么 $u(x)=\phi(x+\omega)-\phi(x)$ 为 $y'+p(x)y=0$ 满足初值条件 $y(a)=0$ 的解. 不难得知此方程的解要么恒为零, 要么恒不为零, 则 $u(x)=0$. □

问题 5 (丁同仁习题 2.3.6). *连续函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界, 证明方程 $y'+y=f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有唯一有界解.*

解答. 解为 $\phi=Ce^{-x}+\int_0^x f(s)e^{s-x}ds$, 由于 f 有界, 则 ϕ 有界当且仅当 $C=\int_{-\infty}^0 f(s)e^s ds$. □

问题 6 (丁同仁习题 2.3.7). *考虑 $H^0=\{f(x)\in C^0: f(x+2\pi)=f(x),\forall x\}$, 则其构成一个 $\mathbb{R}$-线性空间, 定义范数 $\|f\|=\max\limits_{0\le x\le 2\pi}|f(x)|$, 则*

(1) 证明 H^0 是一个 Banach 空间;

(2) 考虑线性算子 $\varphi(f)=\frac{1}{e^{2a\pi}-1}\int_x^{x+2\pi}e^{-a(x-s)}f(s)ds, a>0$, 证明对任何 $f\in H^0$, 存在常数 $k>0$ 使得 $\|\varphi(f)\|\le k\|f\|$.

解答. (1) 取 Cauchy 列 $\{f_n(x)\}$ 满足 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$ 使得当 $m,n>N$ 时有 $\|f_m(x)-f_n(x)\|=\max\limits_{0\le x\le 2\pi}|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$, 那么有 $|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$, 从这里不难得到 $f_n(x)$ 一致收敛于某个 $f(x)$, 则不难得知 H^0 是一个 Banach 空间.

(2) 不难得知

$$
\begin{aligned}
&\|\varphi(f)\|=\frac{1}{e^{2a\pi}-1}\max_{0\le x\le 2\pi}\left|\int_x^{x+2\pi}e^{-a(x-s)}f(s)ds\right|\\
&\le\frac{\|f\|}{e^{2a\pi}-1}\max_{0\le x\le 2\pi}\left|\int_x^{x+2\pi}e^{-a(x-s)}ds\right|=\frac{\|f\|}{e^{2a\pi}-1}\max_{0\le x\le 2\pi}\left|\frac{e^{2ax}}{a}(e^{2\pi a}-1)\right|\\
&=\frac{e^{4\pi a}}{a}\|f\|=k\|f\|,
\end{aligned}
$$

从而得到结论. ◻

定理 2 (积分因子)**.** *假设 μ 是 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 的积分因子使得 $\mu P(x,y)dx+\mu Q(x,y)dy=d\Phi(x,y)$, 则 $\mu(x,y)g(\Phi(x,y))$ 也是其一个积分因子, 其中 g 为任一可微非零函数. 反之, 对该方程的另一积分因子 μ', 都有 $\mu'=\mu g(\Phi)$ 的形式.*

问题 7 (丁同仁习题 2.5.5)**.** *设函数 $P(x,y),Q(x,y),\mu_1(x,y),\mu_2(x,y)$ 是连续可微的, 假设 μ_1,μ_2 是 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 的积分因子, 且 $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ 不恒为常数. 证明 $\frac{\mu_1}{\mu_2}=C$ 为方程的一个通积分.*

解答. 那么不难得知 $\mu_2=\mu_1 g(\Phi)=\mu_1\Phi$ 是积分因子, 其中 $g=\mathrm{id}$, 且 Φ 为通积分, 则证明完毕. ◻

定义 1 (Osgood)**.** *设函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续, 且满足 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq F(|y_1-y_2|)$, 其中 $F(r)>0$ 是 $r>0$ 的连续函数, 而且瑕积分 $\int_0^{r_1}\frac{dr}{F(r)}=\infty$, 其中 r_1 为常数. 则称 $f(x,y)$ 在 G 内对 y 满足 Osgood 条件.*

问题 8 (丁同仁定理 3.2)**.** *设函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内对 y 满足 Osgood 条件, 则方程 $y'=f(x,y)$ 在 G 内经过每一点的解都是唯一的.*

解答. 假设不然, 则经过 (x_0,y_0) 有两个解 $y_1(x),y_2(x)$, 不妨设存在 $x_1>x_0$ 使得 $y_1(x_1)>y_2(x_1)$. 记 $\overline{x}=\sup\{x<x_1: y_1(x)=y_2(x)\}$, 则 $x_0\leq\overline{x}<x_1$. 则对于 $\overline{x}<x\leq x_1$ 有 $r(x)=y_1(x)-y_2(x)>0$, 则

$$r'(x)=y_1'(x)-y_2'(x)=f(x,y_1(x))-f(x,y_2(x))\leq F(|y_1-y_2|),$$

则 $\infty=\int_0^{r_1}\frac{dr}{F(r(x))}=\int_{\overline{x}}^{x_1}\frac{r'(x)}{F(r(x))}dx\leq\int_{\overline{x}}^{x_1}dx=x_1-\overline{x}<\infty$, 矛盾. ◻

问题 9 (丁同仁习题 3.2.1 和 3.2.2)**.** *(1) 用 Ascoli 引理证明: 若某一函数列在有限区间 I 上一致有界且等度连续, 则存在子列一致收敛;*

(2) 举例说明当 I 为无限区间的时候上述结论不成立.

解答. (1) 不妨设 $I=[a,b)$, 则由 Ascoli 引理知对任意的函数列中的函数 $f(x)$ 都可以延拓到 $[a,b]$, 也就只需证明 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在. 取数列 $\{x_n\}\subset I$ 且满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$, 则由等度连续知 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $|c-d|<\delta$ 时有 $|f(c)-f(d)|<\varepsilon$, 那么考虑当存在 $N>0$ 使得 $m,n>N$ 时有 $|x_m-x_n|<\delta$ 可知 $\{f(x_n)\}$ 是 Cauchy 列, 则必然收敛, 由 Heine 定理知极限 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在.

(2) 还真不好说. ◻

问题 10 (丁同仁 3.3 节例 1)**.** *微分方程 $y'=x^2+y^2$ 任意解的存在区间都是有界的.*

解答. 考虑满足 $y(x_0)=y_0$ 的解 $y(x)$, 设其右侧最大存在区间为 $J=[x_0,m)$, 其中 $m>0$, 但不一定是有限值, 不失一般性, 只需证明 m 是有限值即可. 若 $m\le 0$, 则命题成立, 考虑 $m>0$. 存在 $x_1>0$ 使得 $[x_1,m)\in J$, 则 $y'(x)=x^2+y^2(x)$ 对所有 $0<x_1\le x<m$ 存在, 则得到 $y'(x)\ge x_1^2+y^2(x)(x_1\le x<m)$. 也就是说 $\frac{y'(x)}{x_1^2+y^2(x)}\ge 1(x_1\le x<m)$, 积分得到

$$0\le x-x_1\le \int_{x_1}^{x}\frac{y'(x)}{x_1^2+y^2(x)}dx=\frac{1}{x_1}\left(\arctan\frac{y(x)}{x_1}-\arctan\frac{y(x_1)}{x_1}\right),$$

也就是说 $0\le x-x_1\le \frac{\pi}{x_1}$ 对任意的 $x_1\le x<m$ 成立, 则 m 有限. □

问题 11 (丁同仁习题 3.3.2)**.** 讨论微分方程 $y'=\frac{1}{x^2+y^2}$ 的解的区间.

解答. 假设右侧最大存在区间为 $J=[x_0,m)$, 则考虑 $x\to m$, 则必然 $\frac{1}{x^2+y^2}$ 有界, 则 y' 有界, 故 y 不可能无界, 故 y 有界, 则由于解是到无穷远的, 则矛盾. □

定理 3 (关于初值的偏导数之结论)**.** *考虑初值问题* $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y},\lambda),\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0$*. 假设* $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y},\lambda),\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{y}}\in C(\Omega\times\Lambda)$*, 且* $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{w}(x,\lambda,x_0,\boldsymbol{y}_0)$*, 则*

(a) 偏导数 $\partial_{x_0}\boldsymbol{w}$ *是初值问题*

$$\frac{d\boldsymbol{z}}{dx}=\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{y}}(x,\boldsymbol{w}(x,\lambda,x_0,\boldsymbol{y}_0),\lambda)\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}(x_0)=-\boldsymbol{f}(x_0,\boldsymbol{y}_0,\lambda)$$

的解, 因而偏导数 $\partial_{x_0}\boldsymbol{w}$ *连续;*

(b) Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{y}_0}$ *是矩阵初值问题*

$$\frac{d\boldsymbol{Z}}{dx}=\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{y}}(x,\boldsymbol{w}(x,\lambda,x_0,\boldsymbol{y}_0),\lambda)\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Z}(x_0)=\boldsymbol{I}$$

的解, 因而 Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{y}_0}$ *连续.*

定理 4 (广义幂级数)**.** *设* x_0 *是方程* $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ *的正则奇点, 且* $p(x)=\frac{P(x)}{x-x_0},q(x)=\frac{Q(x)}{(x-x_0)^2}$*, 则该微分方程在* x_0 *的某邻域内有收敛的广义幂级数解*

$$y(x)=(x-x_0)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-x_0)^k,c_0\neq 0,$$

其中 $c_k(k\ge 1)$ *可以迭代的求出, 而* ν *是方程的指标方程* $s(s-1)+P(x_0)s+Q(x_0)=0$ *的根之一 (如果都为实根, 则取最大者; 如果为共轭复根, 则取任意一个).*

定理 5. 对线性微分方程组 $\frac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)$ 对应齐次方程的基解矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}(x)$, 则通解为

$$\boldsymbol{y}(x)=\boldsymbol{\Phi}(x)\left(\boldsymbol{c}+\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds\right),$$

若有初值 $\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0$, 则为

$$\boldsymbol{y}(x)=\boldsymbol{\Phi}(x)\left(\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds\right).$$

定理 6. 对微分方程 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$, 考虑基础解组 $\phi_1(x),...,\phi_n(x)$ 的 *Wronsky* 行列式 $W(x)$, 方程通解为 $y(x)=c_1\phi_1(x)+...+c_n\phi_n(x)+\phi^*(x)$, 特别的, 我们可以如此计算

$$\phi^*(x)=\sum_{k=1}^{n}\phi_k(x)\int_{x_0}^{x}\frac{W_k(s)}{W(s)}f(s)ds,$$

其中 $W_k(x)$ 是 $W(x)$ 的 (n,k) 代数余子式.

注 1. 当 $n=2$ 的时候我们有

$$\phi^*(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{\phi_1(s)\phi_2(x)-\phi_2(s)\phi_1(x)}{\phi_1(s)\phi_2'(s)-\phi_2(s)\phi_1'(s)}f(s)ds.$$

定理 7. 对常系数线性微分方程组 $\frac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)$, 我们有

(1) 矩阵 $\boldsymbol{Y}(x)=e^{x\boldsymbol{A}}$ 是常系数齐次线性微分方程组 $\frac{d\boldsymbol{Y}}{dx}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$ 的基解矩阵;

(2) 微分方程组 $\frac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)$ 的通解是

$$\boldsymbol{y}(x)=e^{x\boldsymbol{A}}\boldsymbol{c}+\int_{x_0}^{x}e^{(x-s)\boldsymbol{A}}\boldsymbol{f}(s)ds,$$

若有初值 $\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0$, 则为

$$\boldsymbol{y}(x)=e^{(x-x_0)\boldsymbol{A}}\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^{x}e^{(x-s)\boldsymbol{A}}\boldsymbol{f}(s)ds.$$

定理 8. 对 $\boldsymbol{A}$ 互不相同的特征值为 $\lambda_1,...,\lambda_s$, 重数为 n_i, 设 $\boldsymbol{r}_{10}^{(i)},...,\boldsymbol{r}_{n_i0}^{(i)}$ 是 $\ker(\lambda_i\boldsymbol{I}-$

$\boldsymbol{A})^{n_i}$ 的基, 则

(1) 若 $s=n$, 则齐次方程基解矩阵为 $\mathbf{\Phi}(x)=(e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{r}_{10}^{(1)},...,e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{r}_{10}^{(n)})$;

(2) 若 $s<n$, 令 $\boldsymbol{r}_{jl}^{(i)}=(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{r}_{j,l-1}^{(i)}$, 令 $P_j^{(i)}(x)=\sum_{k=0}^{n_i-1}\frac{x^k}{k!}\boldsymbol{r}_{jk}^{(i)}$, 则齐次方程基解矩阵为 $\mathbf{\Phi}(x)=(e^{\lambda_1 x}P_1^{(1)},...,e^{\lambda_1 x}P_{n_1}^{(1)},...,e^{\lambda_s x}P_1^{(s)},...,e^{\lambda_s x}P_{n_s}^{(s)})$.

注 2. 若特征值是复数, 则其共轭也是特征值, 故计算时取某一个的实部和虚部即可.

定理 9. 对微分方程 $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}(x)+...+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$ 对应特征方程 $P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+...+a_n=0$ 的不同根 $\lambda_1,...,\lambda_s\in\mathbb{C}$, 重数为 n_i, 则基本解组为 $e^{\lambda_1 x},xe^{\lambda_1 x},...,x^{n_1-1}e^{\lambda_1 x},...,e^{\lambda_s x},xe^{\lambda_s x},...,x^{n_s-1}e^{\lambda_s x}$.

命题 1. 对方程 $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}(x)+...+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$ 和对应特征方程 $P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+...+a_n=0$, 我们有:

(1) 若 $f(x)=P_m(x)e^{\mu x}$, 则 $\phi^*(x)=x^kQ_m(x)e^{\mu x}$, 其中 k 为 μ 为特征方程根的重数, 而 $Q_m(x)$ 为待定多项式;

(2) 若 $f(x)=(A_m(x)\cos bx+B_m(x)\sin bx)e^{ax}$, 其中 $\max(\deg A_m,\deg B_m)=m$, 则 $\phi^*(x)=x^k(C_m(x)\cos bx+D_m(x)\sin bx)e^{ax}$, 其中 k 为 $a+bi$ 为特征方程根的重数, 而 C_m,D_m 为待定多项式.