2020 泰山学堂数学取向 ODE 期中考试

18 学堂数学——张一凡

问题 1. 求解下列方程.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y-x}{2x-y}$;

(2) $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u, \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 其中 $u(t) = e^{-t}, t \geq 0$.

问题 2. 用幂级数解法求解 *Airy* 方程 $y'' = xy, x \in (-\infty, \infty)$.

问题 3. *(1)(Gronwall)* 设一元函数 $g(t), \phi(t)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上连续, 且 $g(t) \geq 1$, 常数 $\lambda \geq 0, r \geq 0$. 若满足 $\phi(t) \leq \lambda + \displaystyle\int_{t_0}^{t} (g(\tau)\phi(\tau) + r) d\tau$, 证明

$$\phi(t) \leq (\lambda + rT) \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(\tau) d\tau \right), t_0 \leq t \leq t_1, T = t_1 - t_0.$$

(2) 考虑 *Cauchy* 问题 $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$, 其中 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 而 $\boldsymbol{f}$ 是实变量 t 和 $\boldsymbol{x}$ 的 n 维向量值函数. 设 $\boldsymbol{f} \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, 且对 $\boldsymbol{x}$ 满足局部 *Lipschitz* 条件, 且满足 $\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\| \leq N\|\boldsymbol{x}\|, N > 0$. 证明对任意的 $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, 该方程解的存在区间均为 $(-\infty, \infty)$.

问题 4. 讨论微分方程 $\dfrac{dx}{dt} = t^2 + x^2$ 的解的最大存在区间.

问题 5. 设 *Cauchy* 问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = F(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, 其中数量值函数 f, F 均在区域 $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 内连续且对 y 满足局部 *Lipschitz* 条件, 且 $(x_0, y_0) \in G$. 设

两个方程的解均在 (a,b) 上存在, 不妨记为 $y=y(x), y=Y(x)$. 若 $f(x,y)<F(x,y)$ 对任意 $(x,y)\in G$ 成立, 则当 $x_0<x<b$ 时 $y(x)<Y(x)$; 当 $a<x<x_0$ 时 $y(x)>Y(x)$.

问题 6. 考虑度量空间 (X,d), 设 $f:X\to X$ 为映射. 若对任意的 $x\neq y\in X$ 都有 $d(f(x),f(y))<d(x,y)$, 则称 f 为一个收紧映射.

(1) 若 f 为一个收紧映射且 $X\subset\mathbb{R}^n$ 是紧的, 证明 f 有唯一不动点;

(2) 当 $X\subset\mathbb{R}^n$ 不紧时, 给出 *(1)* 的反例.

问题 7. 举例说明 *Ascoli-Arzelá* 引理中不是紧致集时, 该引理不成立.

问题 8. 考虑微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$, 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $G\subset\mathbb{R}^2$ 内连续, 且满足 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq F(|y_1-y_2|)$, 其中 $F(r)>0$ 是 $r>0$ 的连续函数, 且瑕积分 $\displaystyle\int_0^{r_1}\frac{dr}{F(r)}=\infty$, 其中 $r_1>0$ 为常数, 则称 $f(x,y)$ 在 G 内对 y 满足 *Osgood* 条件. 证明满足 *Osgood* 条件的函数在区域内过每个点的解都唯一.

问题 9. 设函数 $f(x)$ 在 $x\in\mathbb{R}$ 上连续, 证明方程 $\dfrac{dx}{dt}=f^2(x)+e^{-t}$ 具有解的唯一性.