法诺簇的代数 K-稳定性理论

许晨阳

摘要. 我们给出关于法诺簇的代数 K-稳定性理论最近发展的一个简介。我们将重点讨论在高维双有理几何的观点下，对法诺簇的 K-稳定性的理解，及其在构造模空间上的应用。

目录

1. 历史简介

复凯勒 (Kähler) 流形 (X, ω) 上的凯勒 − 爱因斯坦 (KE) 度量是指度量 ω 满足

$$\omega = \lambda \cdot \mathrm{Ric}(\omega).$$

这里有三种情形, 分别对应 $\lambda = 1, 0, -1$。因为 KE 度量的典范性，在一个凯勒流形上寻找这样的度量, 是我们理解复流形的凯勒几何的主要工具之一。

其中 $\lambda = -1$ 时，Aubin 和丘成桐证明了 X 上总是存在 KE 度量。而 $\lambda = 0$ 时，这是丘成桐解决卡拉比 (Calabi) 猜想的著名工作的一个主要推论。剩下一个自然情形是考虑第一陈类 $c_1(X)$ 为正的代数簇上是否有 KE 度量。

这一类情形要比之前的情况更复杂。与前面两种情形不同，人们很早就意识到当 $c_1(X)$ 为正时 (根据小平嵌入定理，这样的凯勒流形一定是代数簇，称为法诺簇)，一个射影代数流形并非总是存在 KE 度量。在上世纪 50 年代,Matsushima 证明 (见

Date: 2020 年 1 月 6 日.

CX 的研究部分受 NSF Grant DMS-1901849 支持.

[Mat57])，如果 X 有 KE 度量，则 $\mathrm{Aut}(X)$ 必须为约化 (reductive) 群。而要证明一个给定法诺簇上存在 KE 度量是一个更复杂的问题。上世纪 80 年代，田刚证明了在曲面时，自同构群为约化群是充分必要条件 (见 [Tia90]). 而在 [Tia97] 里，田刚构造出第一个自同构群有限但不存在 KE 度量的法诺流形的例子。

更重要的是，在 [Tia97] 中, 田刚首次提出了 K-稳定性的概念。在 [Don02] 里, 田刚关于 K-稳定性的定义被 Donaldson 完全用代数几何的语言给出。田刚和 Donaldson 的定义使用了用有限维几何不变式 (GIT) 的理论去逼近无穷维几何不变式的思想。这样的思想也出现于更早的 Donaldson-Uhlenbeck−Yau 关于稳定向量丛和 Einstein-Hermitian 向量丛之间存在小林-Hitchin 对应的证明中。关于法诺簇上 K-稳定性和 KE 度量存在性的等价问题，即丘-田-Donaldson(Y-T-D) 猜想已成为过去几十年指导凯勒几何发展的引领性问题。在光滑情形, 该问题被陈秀雄-Donaldson-孙崧和田刚分别解决 (见 [CDS15, Tia15])。

在 K-稳定性这个代数概念被提出以后，人们尝试发展相应的纯代数几何理论。受之前工作启发最初人们尝试用 GIT 的框架去理解 K-稳定性 (例如 [RT07] 等)。到 2011 年,[Oda13] 注意到 K-稳定性和极小模型理论存在联系。受此工作的影响，极小模型纲领 (MMP) 在 [LX14] 中被系统引入用来研究法诺簇的退化及其和 K-稳定性的关系。实际上 [Don02] 给出了更一般的极化射影簇上 K-稳定性定义。但与之前大多数代数工作不同, [LX14] 中的结论只适用于法诺簇情形。人们也逐渐意识到, 相比于几何不变式论，高维双有理几何是更适合于被用来发展法诺簇的 K-稳定性代数理论的代数几何理论框架!

近些年, 集很多数学家的工作之力，人们对于法诺簇的 K-稳定性的代数几何理解取得了巨大进展。在多种数学新思想的影响下, 尤其是和极小模型理论的深度结合，该方向已发展成高维代数几何一个新的深刻的分支。在接下来的文章中，我们将会讨论该领域目前的三个基本方向: 在章2中我们将会讨论使用极小模型纲领的思想重新理解法诺簇 K-稳定性概念的一系列结果。这一部分工作和丘-田-Donaldson 猜想有着密切的联系。在章3中, 我们会讨论利用 K-稳定性来构造参数化法诺簇的紧模空间的理论。最后在章4中, 我们会讨论使用新近的理论, 验明新的 K-稳定法诺簇的很多例子。

致谢: 作者感谢付保华教授和席南华教授邀请作者做数学所讲座, 也成为此文写作的动机。也感谢付保华教授阅读初稿，提出修改的宝贵意见。

2. 法诺簇的 K-稳定性理论

这一节我们将讨论法诺簇的 K-稳定性的定义。我们将不使用田刚和 Donaldson 在 [Tia97, Don02] 中的原初定义, 而改用从赋值角度发展出来的新定义。新定义与原定义等价，这在一系列工作中被证明。

令 X 为一个 n 维法诺流形 (或者更一般的 klt (见 [KM98]) 法诺簇, 称为 $\mathbb{Q}$-法诺簇), E 为 X 上一个除子赋值。令 $A_X(E)$ 为其对数差异 (log discrepancy) 值。以下由 [Fuj19b, Li17] 引入的不变量是我们文章讨论的核心概念:

$$\beta_X(E) = (-K_X)^n A_X(E) - \int_0^\infty \mathrm{vol}(\mu^*(-K_X) - tE)\, dt.$$

其中双有理射影正则 (normal) 模型 $\mu : Y \to X$ 包含 E 作为其上的除子。β-不变量的重要性可以从下面命题中看出。

Definition-Theorem 2.1 (K-稳定性的赋值准则)**.** *令 X 是一个 $\mathbb{Q}$-法诺簇, 则 X*

(1) K-半稳定 当且仅当对任意除子赋值 E，我们有 $\beta_X(E) \geq 0$;

(2) K-稳定 当且仅当对任意除子赋值 E，我们有 $\beta_X(E) > 0$ 。

证明. 在 [Fuj19b, Li17] 中证明了 (1), 并证明了 K-稳定等价于对于一类特殊除子满足 $\beta_X(E) > 0$。在 [BX19] 中, 我们去掉了 [Fuj19b, Li17] 对除子的限制, 由此得到完整的 (2)。 □

Remark 2.2. 在 [Tia97, Don02] 的原始定义中, 需要考虑对 X 的所有嵌入 $|-rK_X| : X \to \mathbb{P}$ (所有充分可除 r)，任意单参数子群 $\mathbb{G}_m \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ 作用下的退化 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$, 并计算其上广义 Futaki-不变量 $\mathrm{Fut}(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ 的正负号。这是 $X \times \mathbb{A}^1$ 上的 $\mathbb{G}_m$-等变双有理几何。而在新的定义中, 我们只考虑 X 上所有赋值, 因此这是 X 本身的双有理几何。这种变化, 使得很多概念和计算变得更加简单。

这两种定义的等价性的证明来源于以下观点: 在 [LX14] 中, 我们证明为验证法诺簇的各种 K-稳定性概念, 我们只需要考虑一类特殊的等变退化，称为**特殊退化** (special degeneration)，上 $\mathrm{Fut}(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ 的正负号。

从一个特殊退化 $\mathcal{X} \to \mathbb{A}^1$ 出发, 它的 0 上的纤维 X_0, 给出一个函数域 $k(X \times \mathbb{A}^1)$ 上赋值。把这个赋值限制在 $k(X) \subset k(X \times \mathbb{A}^1)$, 我们得到 X 的函数域 $k(X)$ 上一个赋值 $c \cdot \mathrm{ord}_E$ ([BHJ17])。容易计算出在 [Tia97, Don02] 中用来判别 K-稳定性的 $\mathrm{Fut}(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ 和 $c \cdot \beta_X(E)$, 只差一个（正）常数倍。

要完成证明, 我们还需要证明对于验证一般 $\beta_X(E)$ 的符号，我们仅需要验证由特殊退化诱导的所有 E。在 [Fuj19b, Li17] 证明中借助了丁-不变量和丁-稳定性。之

后 [LX16], 利用 [Li17, Li18] 中发展的对锥奇点的正规化体积极小化问题和锥奇点的基的法诺簇 K-稳定性的关系，给出了一个不同证明。

受 β-不变量的启发, 我们也可以考虑

$$\delta_X(E) =_{\mathrm{defn}} \frac{(-K_X)^n \cdot A_X(E)}{\int_0^\infty \mathrm{vol}(-K_X - tE)dt}. \tag{1}$$

Definition 2.3 ([FO18, BJ17])**.** 令 X 是一个 $\mathbb{Q}$-法诺簇, 我们定义 X 的*稳定阈值*为

$$\delta(X) := \inf_E \ \delta_X(E),$$

这里 E 取遍所有 X 上除子赋值。

Remark 2.4. 在 [CRZ19] 中证明了当 X 光滑时,$\delta(X)$ 等于一个微分几何量: 极大 Ricci 曲率下界 (见 [Szé11])。

实际上(1)的分子分母可以同时延拓到整个赋值空间 $\mathrm{Val}(X)$ 上, 因此我们可以对任意 $v \in \mathrm{Val}(X)$ 定义

$$\delta_X(v) =_{\mathrm{defn}} \frac{(-K_X)^n \cdot A_X(v)}{\int_0^\infty \mathrm{vol}(\mathcal{F}_v^t)dt},$$

其中 $A_X(v)$ 由 [MN15] 给出,$\mathcal{F}_v$ 是由 $R := \bigoplus_m H^0(-mK_X)$ 中截影在 v 上赋值生成的滤链, 而 $\mathrm{vol}(\mathcal{F}_v^t)$ 是 $\mathcal{F}_v$ 对应的 Duistermaat–Heckman 测度的体积。我们明显的可以看到对任意 $\lambda > 0$，我们有 $\delta(v) = \delta(\lambda \cdot v)$。

Remark 2.5. [BJ17] 证明了 $\delta(X) := \inf_v \ \delta_X(v)$，并且证明了 $\delta(X)$ 总是被一个赋值取到。这样的赋值有什么几何性质是建立完整 K-稳定性理论的一个关键问题。在 [BLX19] 中, 我们证明了, 如果 $\delta(X) \le 1$, 那么 $\delta(X)$ 总是被一个拟单项式（quasi-monomial）赋值取到。

Conjecture 2.6. *如果 $\delta(X) \le 1$, 那么 $\delta(X)$ 总是被一个除子赋值取到.*

上述猜想的重要性可以从下述事实中看见: 我们可以定义 X 为*一致 K-稳定*, 如果 $\delta(X) > 1$ (这与原来 [BHJ17] 中定义的等价性由 [Fuj19b, BJ17] 得到)。在 [BBJ18, LTW19] 中，人们已经证明一个 $\mathrm{Aut}(X)$ 为有限群的 (可带有奇点的) 法诺簇 X，其上有 KE 度量，当且仅当 X 是一致 K-稳定的。如果猜想2.6成立, 则我们知道对一个 K-稳定的法诺簇 X，因为对所有除子 E 有 $\delta_X(E) > 1$，猜想2.6推出 $\delta(X) > 1$，即 X 是一致 K-稳定的。结合上述 [BBJ18, LTW19] 的工作，我们就可以得到当自同构群 $\mathrm{Aut}(X)$ 有限时，包含奇异情形的整个 Y-T-D 猜想!

Remark 2.7. 对于 Aut(X) 不是有限的情形，[His16] 的工作可以被用来定义此情形下合理的 "一致 K-稳定性", 称为*约化一致 K-稳定性*。在 [Li19] 中, 李驰证明了一般的法诺簇 X 上有 KE 度量, 当且仅当 X 是约化一致 K-稳定。

类似的我们猜想一个法诺簇 X 是 K-重稳定（polystable），当且仅当 X 是约化一致 K-稳定。此时我们可以定义一个约化 δ-不变量，并且考虑猜想2.6类似的问题。具体见 [XZ19]。

3. 法诺簇的 K-模空间

模空间是代数几何的基本工具。当 X 第一陈类为负, 即 K_X 是正的时候, KSB(Kollár-Shephard-Barron) 理论成功地构造出紧模空间，使得模空间上的点对应 K_X 充沛（ample），并只有半对数典范 (semi-log-canonical) 奇点的射影簇。

$-K_X > 0$ 的情形与 $K_X > 0$ 为正的最大区别在于因为 $-mK_X(m > 0)$ 的截影一般不是双有理不变量。因此考虑所有法诺簇 (甚至仅考虑法诺流形) 的函子不是可分的! 因此要得到一个好的模空间, 我们需要考虑更特殊的法诺簇。长期以来如何自然选取一类法诺簇来构造模空间一直是困扰双有理几何学家的一个问题。

最近的一系列工作表明 K-稳定性为建立法诺簇的模空间提供了非常好的理论. 这也是 K-稳定性理论最吸引双有理几何学家的原因之一。我们有如下主要定理。

Theorem 3.1. *固定正有理数 V 和正常数 n.*

(1) 所有维数为 n, 体积 $(-K_X)^n = V$ 的 K-半稳定法诺簇被一个有限型 Artin 叠 (stack)$\mathcal{M}^{\mathrm{kss}}_{n,V}$ 参数化;

(2) $\mathcal{M}^{\mathrm{kss}}_{n,V}$ 有一个可分好模空间 (good moduli space) $\mathcal{M}^{\mathrm{kss}}_{n,V} \to M^{\mathrm{kps}}_{n,V}$ 使得 $M^{\mathrm{kps}}_{n,V}$ 上的点一一对应 K-重稳定法诺簇。

该深刻定理是很多工作的综合。我们在下面将做一个简要概述。

在第一部分，关于 $\mathcal{M}^{\mathrm{kss}}_{n,V}$ 是有限型 Artin 叠的论断由三部分组成。首先基于 [Bir19] 里关于法诺簇有界性的工作,[Jia17] 证明了所有体积 $(-K_X)^n = V$ 的 n 维 K-半稳定法诺簇是有界的, 即存在一个一致 N 使得 $|-NK_X|$ 给出 X 到射影空间的一个嵌入。下一步, 考虑参数化有相同首项 Hilbert 多项式的代数簇的 Hilbert 空间, 这样的 Hilbert 空间是有限型的。利用 KSB 模空间研究中发展出来的局部理论, 尤其是关于 Kollár 条件的工作 (见 [Kol08]), 我们知道该 Hilbert 空间有一个典范子空间, 表示其中所有纤维是 $\mathbb{Q}$-法诺簇的族 (family)。最后在 [BLX19, Xu19] 中, 我们证明了对于一族 $\mathbb{Q}$-法诺簇, 其纤维是 K-半稳定的部分构成一个开集。由该 Hilbert 空间的有限型子空间在群 PGL 作用下的叠商（stack quotient），就构成 $\mathcal{M}^{\mathrm{kss}}_{n,V}$。

第二部分是关于可分好模空间的存在性。在 [Alp13] 中, 以 GIT 映射为原型的基础, Alper 提出了一个 Artin 叠的好模空间的概念。一个 Artin 叠如果有好模空间, 则对于我们了解这个 Artin 叠上的几何提供了很多信息。

特别地这样的好模空间上的点对应于原 Artin 叠上的 S-等价类, 并且一个整体商 Artin 叠如果有可分好模空间，则任何一个 S-等价类当中有唯一的极小轨道 (在轨道闭包的包含关系下)。在法诺簇的 K-稳定性问题中，[LWX18] 证明了每个 S-等价类存在唯一极小元素。受该工作启发, 在 [BX19] 中, 我们证明了 K-半稳定法诺簇退化在 S-等价类下的唯一性。其证明核心是一类分次环的有限生成性。结合该工作，在 [ABHLX19] 中我们利用在 [AHLH18] 发展出的基本理论，完成了可分好模空间 $\mathcal{M}^{\rm kss}_{n,V}\to M^{\rm kps}_{n,V}$ 的存在性的证明。

可分好模空间存在性的一个重要推论是对任意 K-重稳定的法诺簇, 其自同构群是约化的。这是 Matsushima 定理 [Mat57] 的一个奇异情形的推广, 并且是第一个纯代数证明。

下述问题是法诺簇 K-模空间一般理论里尚有待解决的问题中最重要的一个。

Conjecture 3.2. *模空间 $M^{\rm kps}_{n,V}$ 是紧的。*

Remark 3.3. 猜想2.6和猜想3.2都可以从一类拟单项式赋值的伴随分次环的有限生成性得到。一般情形下，拟单项式赋值的有理秩可能大于一。这为双有理几何所集中研究的有限生成性提出了一类新的问题。

接下来我们讨论 $M^{\rm kps}_{n,V}$ 的射影性。[Tia97] 定义了 CM-线丛。容易证明 CM-线丛可以下降为 $M^{\rm kps}_{n,V}$ 上一个 $\mathbb{Q}$-线丛 $\Lambda_{\rm CM}$。

Theorem 3.4. *对于任意一个紧子空间 $M\subset M^{\rm kps}_{n,V}$, 如果 M 上任意点对应的 K-重稳定的法诺簇是约化一致 K-稳定的, 则 $\Lambda_{\rm CM}|_M$ 是充沛的。*

当假设所有法诺簇是一致 K-稳定时，[CP18] 中证明了上述定理。在 [XZ19]，我们将 [CP18] 中一致稳定的假设推广到约化一致稳定，从而包含了自同构群是无限群的部分。实际上因为任意 K-重稳定法诺簇都猜想是约化一致稳定 (见评论2.7) 并且整个模空间 $M^{\rm kps}_{n,V}$ 猜想是紧的 (猜想3.2)，定理3.4预示 $M^{\rm kps}_{n,V}$ 是射影簇。特别地，[XZ19] 证明了参数化所有可光滑化的 K-重稳定法诺簇的紧模空间 (见 [LWX19]) 是射影的。

4. 显式例子

对法诺簇 K-稳定性研究的一个重要方向是判断一个给定的法诺簇是否是 K-稳定的。我们将在这一章里讨论最新的一些关于具体法诺簇上 K-稳定性的研究。这个方向的研究仍然处于初始阶段, 即存在许多法诺簇, 我们不能判断其是否 K-稳定。

4.1. $|-K_X|_{\mathbb{Q}}$ 的奇点不变量. 一类证明 X 是 K-稳定的的办法是证明 $\mathbb{Q}$-线性系 $|-K_X|_{\mathbb{Q}}$ 中的元素的奇点足够“好”。田刚在 [Tia87] 著名的 α-不变量判断准则可以看成是这方面最早的结果之一。这里

$$\alpha(X)=\inf_D\{\ \mathrm{lct}(X,D)\mid D\in|-K_X|_{\mathbb{Q}}\}.$$

在 [Tia87] 中，田刚给出一个法诺 K-稳定性的充分条件，即如果一个 n 维法诺流形 X 满足 $\alpha(X)>\frac{n}{n+1}$，则其是 K-稳定的。这引发了很多关于法诺簇的 α-不变量的计算 (见 [Che01, CS18] 等)。

利用前面发展出来的关于 δ-不变量的理论, 我们可以证明很多新的法诺簇是 K-稳定的。其中 δ-不变量可以看作对于 $|-K_X|_{\mathbb{Q}}$ 中基型 (basis type) 除子的对数典范阈值的下界

$$\delta(X)=\inf_D\{\ \mathrm{lct}(X,D)\mid D\in|-K_X|_{\mathbb{Q}},D\text{是基型}\}$$

(见 [FO18, BJ17])。

通过比较 $\alpha(X)$ 和 $\delta(X)$, Fujita 将田刚的结果推广到包含等号的情形。

Theorem 4.1 ([Tia87, Fuj19a]). *如果一个 $n(\geq 2)$ 维法诺流形 X 满足 $\alpha(X)\geq\frac{n}{n+1}$, 则 X 是 K-稳定的。*

满足定理4.1的例子包括了 $\mathbb{P}^{n+1}$ 中所有光滑 $n+1$ 次光滑超曲面。一个有意思的现象是，如果我们考虑 X 有奇点的情形，则 $\alpha(X)>\frac{n}{n+1}$ 仍然推出 X 是 K-稳定 (见 [OS12])，但存在 $\alpha(X)=\frac{n}{n+1}$，X 只是严格 K-半稳定的例子 (见 [LZ19])。

另外一类例子是双有理超刚性 (birationally superrigid) 法诺簇。

Theorem 4.2 ([SZ19]). *令 X 是一个双有理超刚性法诺簇, 如果 $\alpha(X)>\frac{1}{2}$, 则 X 是 K-稳定的。*

这里双有理超刚性法诺簇是 Fano 从 20 世纪初就开始研究的一类非常特殊的法诺簇：它只有唯一的“简单”双有理模型（即森（Mori）-纤维空间）。

4.2. **模空间方法.** 另一种研究具体法诺簇上 K-稳定性的方法是利用法诺簇的紧模空间。

从一个已知 K-稳定的法诺流形 X 出发, 考虑它在一个单参数族下的退化。根据 (可光滑化) 法诺簇模空间的紧可分性，我们知道存在唯一 K-重稳定退化 X_0。该 K-重稳定法诺簇 X_0 通常满足一些整体和局部约束。其中一个整体约束是体积不变，即 $(-K_X)^n = (-K_{X_0})^n$。局部约束最强是下述结果: 刘雨晨在 [Fuj18] 的基础上证明了 X_0 上任意一点 $x \in X_0$ 的体积 (奇点局部体积定义见 [Li18]) 满足

$$\widehat{\mathrm{vol}}(x, X_0) \geq \frac{n^n}{(n+1)^n}(-K_{X_0})^n.$$

当 $(-K_{X_0})^n$ 比较大的时候, 这这给出关于奇点的很强约束, 又反过来给出 X_0 的很多约束。这样的结果在 [MM93, OSS16] 构造所有曲面退化的时候已经被用到。在最近的研究中我们将这样的方法推广到三维, 证明了

Theorem 4.3 ([LX19])**.** *$\mathbb{P}^4$ 中三次超曲面是 K-(半, 重) 稳定, 当且仅当它是 GIT-(半, 重) 稳定。*

另外一类情形是考虑对数法诺偶 (X, Δ)。此时我们可以通过变换 Δ 的系数得到模空间之间的“穿墙 (wall crossing)”效应。[ADL19] 系统地考虑了平面曲线 $(\mathbb{P}^2, tC)$ $(0 < t < \frac{3}{\deg(C)})$ 的情形, 并完成了次数较低的所有可能模空间的计算。

4.3. **未知情形.** 目前还有很多法诺簇我们不知道是否 K-稳定。例如下述问题:

Conjecture 4.4. *$\mathbb{P}^{n+1}$ 中所有光滑法诺超曲面都是 K-稳定的。*

对于上述问题，尽管我们知道任意次数和维数的一般位置的光滑法诺超曲面总是 K-稳定的，但对所有法诺超曲面，我们现在仅完整地知道维数不超过 3，或者次数极大 ($= n+1$) 的情形 (以及次数为 1 或者 2 的简单情形)。其中特别有趣的是三次超曲面。

Conjecture 4.5. *对任意 $n \geq 4$, $\mathbb{P}^{n+1}$ 中三次超曲面是 K-(半, 重) 稳定, 当且仅当它是 GIT-(半, 重) 稳定。*

另外一个有趣的例子是

Question 4.6. 考虑一个亏格不小于 2 的曲线 C, 并令 $L \in \mathrm{Pic}^d(C)$。则参数化 C 上所有秩 r, 第一陈类为 L 的重稳定向量丛的法诺模空间是 K-稳定的。

我们已知法诺流形上如果有 KE 度量,则它的切丛有赫米特-爱因斯坦(Hermite-Einstein)度量，因此总是重稳定 (对于 $-K_X$)。一个有趣的问题是给出从法诺流形 K-重稳定到切丛重稳定的一个直接代数几何证明。

References

[ABHLX19] J. Alper, H. Blum, D. Halpern-Leistner, and C. Xu, *Reductivity of the automorphism group of K-polystable Fano varieties*, arXiv:1906.03122 (2019).

[ADL19] K. Ascher, K. DeVleming, and Y. Liu, *Wall crossing for K-moduli spaces of plane curves*, arXiv:1909.04576 (2019).

[AHLH18] J. Alper, D. Halpern-Leistner, and J. Heinloth, *Existence of moduli spaces for algebraic stacks*, arXiv:1812.01128 (2018).

[Alp13] J. Alper, *Good moduli spaces for Artin stacks*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **63** (2013), no. 6, 2349–2402.

[BBJ18] R. Berman, S. Boucksom, and M. Jonsson, *A variational approach to the Yau-Tian-Donaldson conjecture*, arXiv:1509.04561v2 (2018).

[BHJ17] S. Boucksom, T. Hisamoto, and M. Jonsson, *Uniform K-stability, Duistermaat-Heckman measures and singularities of pairs*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **67** (2017), no. 2, 743–841.

[Bir19] C. Birkar, *Anti-pluricanonical systems on Fano varieties*, Ann. of Math. (2) **190** (2019), no. 2, 345–463.

[BJ17] H. Blum and M. Jonsson, *Thresholds, valuations, and K-stability*, arXiv:1706.04548 (2017).

[BLX19] H. Blum, Y. Liu, and C. Xu, *Openness of K-semistability for Fano varieties*, arXiv:1907.02408 (2019).

[BX19] H. Blum and C. Xu, *Uniqueness of K-polystable degenerations of Fano varieties*, Ann. of Math. (2) **190** (2019), no. 2, 609–656.

[Che01] I. Cheltsov, *Log canonical thresholds on hypersurfaces*, Mat. Sb. **192** (2001), no. 8, 155–172 (Russian, with Russian summary); English transl., Sb. Math. **192** (2001), no. 7-8, 1241–1257.

[CDS15] X. Chen, S. Donaldson, and S. Sun, *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. I: Approximation of metrics with cone singularities, II: Limits with cone angle less than* 2π*, III: Limits as cone angle approaches* 2π *and completion of the main proof.*, J. Amer. Math. Soc. **28** (2015), no. 1, 183–197, 199–234, 235–278.

[CP18] G. Codogni and Z. Patakfalvi, *Positivity of the CM line bundle for families of K-stable klt Fanos*, arXiv:1806.07180 (2018).

[CRZ19] I. Cheltsov, Y. Rubinstein, and K. Zhang, *Basis log canonical thresholds, local intersection estimates, and asymptotically log del Pezzo surfaces*, Selecta Math. (N.S.) **25** (2019), no. 2, Art. 34, 36.

[CS18] I. Cheltsov and C. Shramov, *Kähler-Einstein Fano threefolds of degree 22*, arXiv:1803.02774 (2018).

[Don02] S. Donaldson, *Scalar curvature and stability of toric varieties*, J. Differential Geom. **62** (2002), no. 2, 289–349.

[Fuj18] K. Fujita, *Optimal bounds for the volumes of Kähler-Einstein Fano manifolds*, Amer. J. Math. **140** (2018), no. 2, 391-414.

[Fuj19a] ———, *K-stability of Fano manifolds with not small alpha invariants*, J. Inst. Math. Jussieu **18** (2019), no. 3, 519–530.

[Fuj19b] ———, *A valuative criterion for uniform K-stability of* $\mathbb{Q}$*-Fano varieties*, J. Reine Angew. Math. **751** (2019), 309–338.

[FO18] K. Fujita and Y. Odaka, *On the K-stability of Fano varieties and anticanonical divisors*, Tohoku Math. J. **70** (2018), no. 4, 511-521.

[His16] T. Hisamoto, *Stability and coercivity for toric polarizations*, 1610.07998 (2016).

[Jia17] C. Jiang, *Boundedness of* $\mathbb{Q}$*-Fano varieties with degrees and alpha-invariants bounded from below*, to appear in Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., arXiv:1705.02740 (2017).

[KM98] J. Kollár and S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 134, Cambridge University Press, Cambridge, 1998. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti; Translated from the 1998 Japanese original.

[Kol08] J. Kollár, *Hulls and Husks*, arXiv:0805.0576 (2008).

[Kol13] ———, *Singularities of the minimal model program*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 200, Cambridge University Press, Cambridge, 2013. With a collaboration of Sándor Kovács.

[Li17] C. Li, *K-semistability is equivariant volume minimization*, Duke Math. J. **166** (2017), no. 16, 3147–3218.

[Li18] ———, *Minimizing normalized volumes of valuations*, Math. Zeit. **289** (2018), no. 1-2, 491–513.

[Li19] ———, *On equivariantly uniform stability and Yau-Tian-Donaldson conjecture for singular Fano varieties*, arXiv:1907.09399 (2019).

[Liu18] Y. Liu, *The volume of singular Kähler–Einstein Fano varieties*, Compos. Math. **154** (2018), no. 6, 1131–1158.

[LLX18] C. Li, Y. Liu, and C. Xu, *A guided tour to normalized volumes*, arXiv:1806.07112 (2018).

[LTW19] C. Li, G. Tian, and F. Wang, *The uniform version of Yau-Tian-Donaldson conjecture for singular Fano varieties*, arXiv:1903.01215 (2019).

[LWX18] C. Li, X. Wang, and C. Xu, *Algebraicity of the metric tangent cones and equivariant K-stability*, arXiv:1805.03393 (2018).

[LWX19] ———, *On the proper moduli spaces of smoothable Kähler-Einstein Fano varieties*, Duke Math. J. **168** (2019), no. 8, 1387–1459.

[LX14] C. Li and C. Xu, *Special test configuration and K-stability of Fano varieties*, Ann. of Math. (2) **180** (2014), no. 1, 197–232.

[LX16] ———, *Stability of Valuations and Kollár Components*, to appear in J. Euro. Math. Soc., arXiv:1604.05398 (2016).

[LX19] Y. Liu and C. Xu, *K-stability of cubic threefolds*, Duke Math. J. **168** (2019), no. 11, 2029–2073.

[LZ19] Y. Liu and Z. Zhuang, *On the sharpness of Tian's criterion for K-stability*, arXiv:1903.04719 (2019).

[MN15] Mircea Mustaţă and Johannes Nicaise, *Weight functions on non-Archimedean analytic spaces and the Kontsevich-Soibelman skeleton*, Algebr. Geom. **2** (2015), no. 3, 365–404.

[MM93] Toshiki Mabuchi and Shigeru Mukai, *Stability and Einstein-Kähler metric of a quartic del Pezzo surface*, Einstein metrics and Yang-Mills connections (Sanda, 1990), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 145, Dekker, New York, 1993, pp. 133–160.

[Mat57] Yozô Matsushima, *Sur la structure du groupe d'homéomorphismes analytiques d'une certaine variété kählérienne*, Nagoya Math. J. **11** (1957), 145–150.

[Oda13] Y. Odaka, *The GIT stability of polarized varieties via discrepancy*, Ann. of Math. (2) **177** (2013), no. 2, 645-661.

[OS12] Y. Odaka and Y. Sano, *Alpha invariant and K-stability of* $\mathbb{Q}$*-Fano varieties*, Adv. Math. **229** (2012), no. 5, 2818–2834.

[OSS16] Y. Odaka, C. Spotti, and S. Sun, *Compact moduli spaces of del Pezzo surfaces and Kähler-Einstein metrics*, J. Differential Geom. **102** (2016), no. 1, 127–172.

[PT09] S. Paul and G. Tian, *CM stability and the generalized Futaki invariant II*, Astérisque **328** (2009), 339–354 (2010).

[RT07] J. Ross and R. Thomas, *A study of the Hilbert-Mumford criterion for the stability of projective varieties*, J. Algebraic Geom **16** (2007), 201-255.

[SZ19] C. Stibitz and Z. Zhuang, *K-stability of birationally superrigid Fano varieties*, Compos. Math. **155** (2019), no. 9, 1845–1852.

[Szé11] G. Székelyhidi, *Greatest lower bounds on the Ricci curvature of Fano manifolds*, Compos. Math. **147** (2011), no. 1, 319–331.

[Tia87] G. Tian, *On Kähler-Einstein metrics on certain Kähler manifolds with* $C_1(M) > 0$, Invent. Math. **89** (1987), no. 2, 225–246.

[Tia90] ———, *On Calabi's conjecture for complex surfaces with positive first Chern class*, Invent. Math. **101** (1990), no. 1, 101–172.

[Tia97] ———, *Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature*, Invent. Math. **130** (1997), no. 1, 1–37.

[Tia15] ———, *K-stability and Kähler-Einstein metrics*, Comm. Pure Appl. Math. **68** (2015), no. 7, 1085–1156.

[Xu19] C. Xu, *A minimizing Valuation is Quasi-monomial*, to appear in Annals of Math., arXiv:1907.01114 (2019).

[XZ19] C. Xu and Z. Zhuang, *On positivity of the CM line bundle on K-moduli spaces*, arXiv:1912.12961 (2019).

MIT, Cambridge, MA 02139, USA
E-mail address: cyxu@mit.edu

北京大学国际数学研究中心
E-mail address: cyxu@math.pku.edu.cn